Skript

Ingenieurinformatik -Teil 2
MATLAB - Simulink

Teil 1 : Vorlesung

Teil 2 : Praktikum

Teil 3 : Klausuren

Wintersemester 2018/19

Vorlesung

Praktikum

Version 3, WS2018*

Ingenieurinformatik
Teilmodul II
Numerik für Ingenieure
(Einführung in MATLAB/Simulink)

Ingenieurinformatik - Teilmodul II

Lernziele :

- Einführung in eine numerische Simulationsumgebung

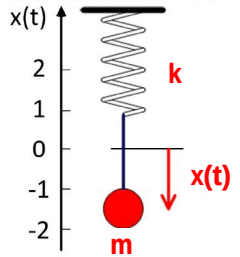
  VDI-Richtlinie 3633: „Simulation ist das Nachbilden eines Systems mit seinen dynamischen Prozessen in einem experimentierfähigem Modell, um zu Erkenntnissen zu gelangen, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind."
- Umgang mit MATLAB und Simulink
- Numerische Verfahren zur Lösung technischer Probleme
- Ausgewählte Probleme aus Maschinenbau, Fahrzeugtechnik, Luft- und Raumfahrttechnik mit MATLAB und Simulink lösen

Voraussetzungen :

- Beherrschung einer Programmiersprache (Ingenieurinformatik - Teilmodul I)
- Ingenieurmathematik
  Lineare Algebra : Vektoren, Matrizen, Eigenwerte und Eigenvektoren
  Analysis : Differential- und Integralrechnung
  Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Technische Mechanik : Schwingungen

Typisches Problem, das einfach mit MATLAB oder Simulink gelöst werden kann :

Schwingung einer Masse mit Dämpfung (siehe Wikipedia)



Bewegungsgleichungen (δ Abklingkonstante) :

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t) - 2 \cdot \delta \cdot m \cdot \dot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Anfangsbedingungen :

$$x(t=0) = x_0 \qquad \dot{x}(t=0) = v_0$$

Für den Fall δ=0 (keine Dämpfung/Reibung) lautet die allgemeine Lösung der DGL:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

Die Konstanten A und B ergeben sich aus den beiden Anfangsbedingungen. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet damit :

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

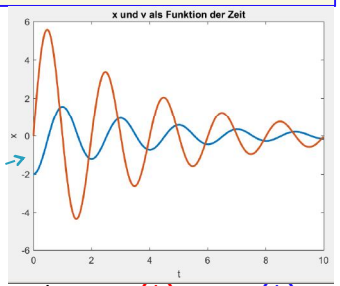
E_03 Was ist MATLAB ? - Lösung programmieren

MATLAB-Skript: schwingungScr.m

```
% Parameter der DGL
global w0 delta;
T = 2;        % Periodendauer
w0 = 2*pi/T; % Eigenfrequenz
delta = 0.25;%Abklingkonstante
% Anfangsbedingungen
y0 = [-2; 0.0]; % Vektor mit 2 Zeilen
% Differentialgleichung mit ode45 lösen
[t, erg] =
  ode45(@schwingungDgl,[0:0.02:10],y0);
% Lösung graphisch ausgeben
plot(t, erg,'LINEWIDTH',2.0)
xlabel('t');  ylabel('x');
title('x und v als Funktion der Zeit');
% Lösung tabellarisch ausgeben
[t, erg] % Ausgabe von t, x und v
```

MATLAB-Funktion: schwingungDgl.m

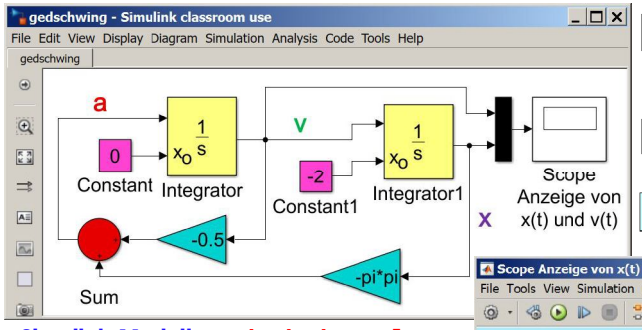
```
function dy_dt = schwingungDgl(t,y)
 global w0 delta;
 dy_dt(1,1)= y(2);
 dy_dt(2,1)=-2*delta*y(2)-w0^2*y(1);
end
```



t	x(t)	v(t)
0.000	-2.0000	0.0000
0.020	-1.9961	0.3926
0.040	-1.9843	0.7797
0.060	-1.9649	1.1599
...	...	...

Variable `t` ist ein Vektor - Zeitpunkte
Variable `erg` ist eine Matrix mit 2 Spalten (x und v)!
`t` und `erg` besitzen gleich viele Zeilen

E_04 Was ist Simulink ? - Lösung graphisch erstellen



$$\ddot{x}(t) = -2\cdot\delta\cdot\dot{x}(t) - \omega_0^2\cdot x(t)$$

mit $\omega_0 = \pi$ und $\delta = 0.25$

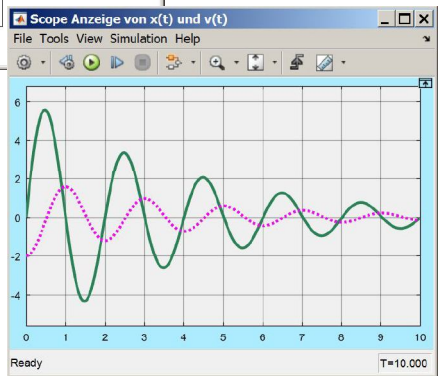
$$\ddot{x}(t) = -0.5\cdot\dot{x}(t) - \pi^2\cdot x(t)$$

$x(t=0) = -2 \quad v(t=0) = 0$

Simulink-Modell: gedschwing.slx

3 Signale : a, v und x

- **Integration der Beschleunigung a ergibt die Geschwindigkeit v**
- **Integration der Geschwindigkeit v ergibt die Auslenkung x**
- **Bei jeder Integration wird jeweils eine Anfangsbedingung verwendet**
- **Beschleunigung a aus x und v berechnen**



E_05 Was ist MATLAB / Simulink ?

MATLAB - Abkürzung für MATrix LABoratory

- **Programmierumgebung, die in den 1970er Jahren entwickelt worden ist, um auf einfache und komfortable Weise die numerischen Funktionsbibliotheken LINPACK und EISPACK zu nutzen (Softwarebibliotheken um Probleme aus der Linearen Algebra zu lösen, z.B. Gleichungssysteme, Eigenwerte und Eigenvektoren)**

"Cleve Moler is chief mathematician, chairman, and cofounder of MathWorks. Moler was a professor of math and computer science for almost 20 years at the University of Michigan, Stanford University and the University of New Mexico."
"In addition to being the author of the first version of MATLAB, Moler is one of the authors of the LINPACK and EISPACK scientific subroutine libraries."

- **zunächst in der Programmiersprache FORTRAN geschrieben, später in C**
- **The MathWorks, Inc. entwickelt und vertreibt MATLAB**
  www.mathworks.com **www.mathworks.de**
- **Kostenlose Alternativen (?) zu MATLAB**
  Scilab – www.scilab.org **Octave – www.octave.org**
  Python

E_06 Was ist MATLAB / Simulink ?

MATLAB/Simulink besonders geeignet für

- **Numerische Berechnungen**
- **Visualisierung von Daten**
- **Modellierung und Simulation technischer Probleme**

Im Gegensatz zu Maple oder Mathematica arbeitet MATLAB nicht symbolisch sondern numerisch. Z.B. die Lösung einer quadratischen Gleichung wird mit MATLAB nicht analytisch berechnet sondern numerisch. D.h. das Ergebnis der Berechnung sind Zahlen und keine geschlossene Formeln (Symbolische Berechnungen können aber trotzdem mit MATLAB durchgeführt werden).

Beispiel : Lösung einer quadratischen Gleichung

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$$

Symbolische Berechnung — ***Maple Mathematica***

$$x_{1/2} = \frac{1}{2\cdot a}\left(-b + \sqrt{b\cdot b - 4\cdot a\cdot c}\right)$$

$$2\cdot x^2 + 3\cdot x + 1 = 0$$

Numerische Berechnung — ***MATLAB***

$$x_1 = -0.5 \qquad x_2 = -1$$

Was ist MATLAB / Simulink ?

MATLAB kann auf verschiedene Weise genutzt werden

- **Interaktiv** (als „Taschenrechner“)
  direkte Eingabe von Anweisungen/Befehlen und sofortige Ausführung
  nur für sehr einfache Probleme geeignet
- **Programmiersprache**
  Anweisungen/Befehle werden in einer Datei (**M-File**) gespeichert – **MATLAB-Programm**. Dieses Programm wird anschließend ausgeführt.

MATLAB/Simulink bietet bereits eine Vielzahl von fertigen Lösungen für verschiedenste Probleme aus den Ingenieur- , Natur- und Finanzwissenschaften. **Toolboxen** (Programmbibliotheken) für

- Entwurf und Analyse von Steuerungs- und Regelungssystemen
- Bildverarbeitung und Computer Vision
- Signalverarbeitung und Kommunikation
- Test- und Messtechnik
- Rapid Prototyping und HIL-Simulation
- Codegenerierung und Verifikation
- . . .

Ingenieurinformatik – Teilmodul II

Zeitaufwand

Sie müssen **jede Vorlesung mindestens zwei Stunden nachbereiten**. D.h. den Vorlesungsstoff noch einmal durcharbeiten und die Beispiele aus der Vorlesung am Rechner ausprobieren. Ebenso sollten Sie kleinere Änderungen an den Beispielen vornehmen um diese besser zu verstehen. Sie müssen **alle Hausaufgaben selbst bearbeiten**! Für jeden **Praktikumstermin gilt das gleiche**. Wenn Sie das nicht machen, werden Sie den Inhalt der Vorlesung nicht verstehen.

Wenn Sie meinen mit weniger eigenem Aufwand auszukommen, dann täuschen Sie sich meistens selbst oder merken gar nicht, dass Sie den Stoff nicht verstanden haben und nicht anwenden können. Typischerweise können Sie dann beim dritten Praktikumstermin selbst einfachste Aufgaben nicht mehr bearbeiten und sitzen nur herum, ohne etwas zu verstehen.

Wenn Sie Inhalte aus der Mathematik bereits wieder vergessen haben oder nicht anwenden können, werden Sie noch erheblich mehr Zeit verwenden müssen, da Sie Inhalte aus der Mathematik nachholen müssen.

Die C-Programmierung (Teilmodul I, 2. Semester) wird vorausgesetzt.

Ingenieurinformatik – Teilmodul II

Skript: Teil 1 - **Vorlesung**, Teil 2 – **Praktikum** , Teil 3 - **Klausuren**

Lehrbücher zur Vorlesung:

Beucher	MATLAB und Simulink Verlag mitp, 1. Auflage, 2013
Stein	Programmieren mit MATLAB Hanser, 6. Auflage, 2017
Scherf	Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, 2010
Pietruszka	MATLAB und Simulink in der Ingenieurpraxis Vieweg + Teubner Verlag, 4. Auflage, 2014
Angermann, Beuschel, Rau, Wohlfahrt	MATLAB – Simulink - Stateflow Oldenbourg Verlag, 9. Auflage, 2016
Kutzner, Schoof	MATLAB/Simulink - Eine Einführung RRZN-Handbuch, 6. Auflage, 2013

Homepage:

`http://reichl.userweb.mwn.de/`
`http://kuepper.userweb.mwn.de/`

Ingenieurinformatik – Teilmodul II

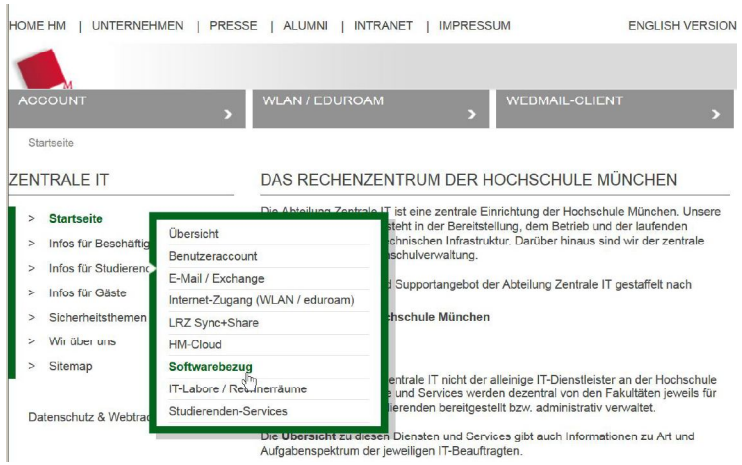
MATLAB – Simulink Dokumente (R2016b)	**Seitenanzahl**
MATLAB Primer	206
MATLAB Programming Fundamentals	1222
MATLAB Mathematics	642
MATLAB Function Reference	12488
. . .	
Simulink Getting Started Guide	92
Simulink User‘s Guide	4022
Simulink Reference Guide	4164
. . .	
Stateflow Getting Started Guide	110
Stateflow User‘s Guide	1418
. . .	

Transferlaufwerk : `X:\Dozenten\Ingenieurinformatik\Matlab`

Online : `www.mathworks.de/support -> Documentation`

Download und Installation von MATLAB/Simulink

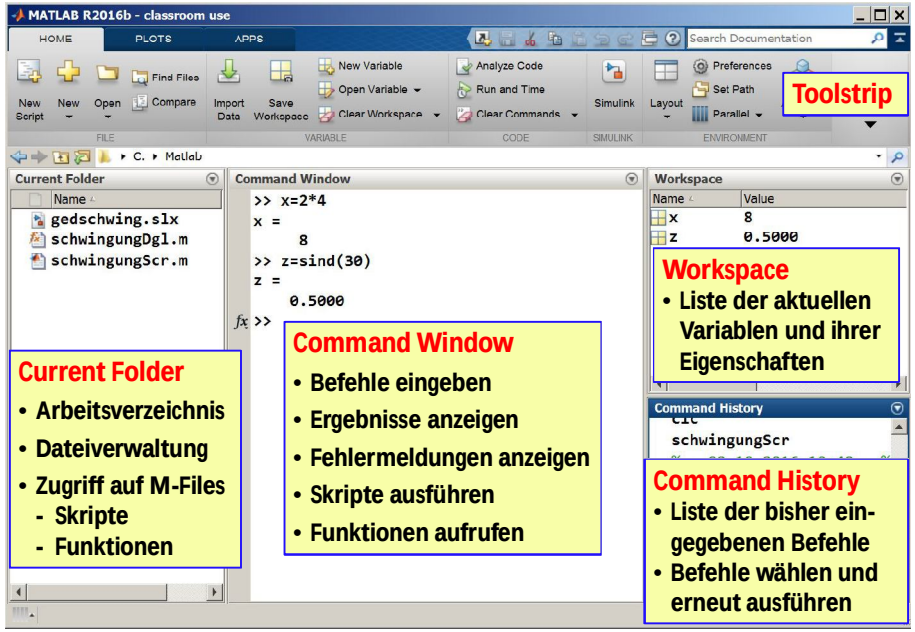
http://www.rz.hm.edu/startseite_1/index.de.html



Wir benötigen nur MATLAB und Simulink. Installiert man alle angebotenen Toolboxen braucht man ca. 17 GB Speicherplatz.

Gliederung der Vorlesung

Kapitel 1 – Einführung in MATLAB




```
>> 3+4+3*3
ans =
    16
>> 3^4+5
ans =
    86
>> 7/4
ans =
    1.7500
```

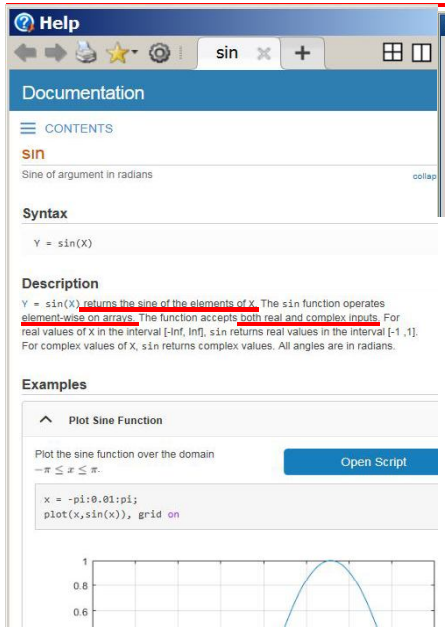
```
>> 3+4.0
ans =
     7
>> 3.1+4.2
ans =
    7.3000
>> 3.1+3.9
ans =
     7
```

```
>> x=50
x =
    50
>> y=sqrt(x)
y =
    7.0711
>> cos(0)
ans =
     1
>> z=sind(30)
z =
    0.5000
>> z=x*sqrt(y)
z =
  132.9574
```

```
>> sinus(0)
Undefined function 'sinus' for input
arguments of type 'double'.

>> cos(o)
Undefined function or variable 'o'.
```

Für einfachste Probleme kann MATLAB wie eine Art Taschenrechner verwendet werden. Der Anwender gibt einen Befehl (Ausdruck) im Command-Window ein, MATLAB führt diesen Befehl aus und zeigt das Ergebnis an, ggf. auch eine Fehlermeldung. Das Ergebnis wird in der Standardvariablen ans (answer) gespeichert oder in einer Variablen mit vorgegebenem Namen (hier : x, y, z).




```
>> help sin
 sin    Sine of argument in radians.
    sin(X) is the sine of the elements of X.

    See also asin, sind.

    Reference page for sin
    Other functions named sin
```

sin - Sinus
radians – Bogenmaß
Was bedeutet „elements ?
X darf Skalar, Vektor oder Matrix sein!

```
>> sin(pi/6)          [pi/6  pi/3  pi/2]
ans =
    0.5000
>> sin([pi/6 pi/3 pi/2])
ans =
    0.5000    0.8660    1.0000
```

1.2 MATLAB – Interaktiver Modus (Taschenrechner)

Das Ergebnis eines Ausdrucks wird, falls keine linke Seite (z.B. y = . . .) angegeben ist, in der Standardvariablen ans (answer) gespeichert.

```
Command Window
>> help ans
 ans Most recent answer.
    ans is the variable created automatically when expressions
    are not assigned to anything else. ANSwer.
```

Grundrechenarten : + - * / ^ (Potenzierung) ~~%~~

Elementare Funktionen :

```
Command Window
>> help matlab\elfun
  Elementary math functions.

  Trigonometric.
    sin         - Sine.
    sind        - Sine of argument in degrees.
    sinh        - Hyperbolic sine.
    asin        - Inverse sine.
    asind       - Inverse sine, result in degrees.
    asinh       - Inverse hyperbolic sine.
    cos         - Cosine.
```

```
tan
exp
log
log10
sqrt
abs
mod
sign
```


1.3 MATLAB - Variablen

In der Programmiersprache C und auch in den meisten anderen Programmiersprachen muss eine Variable vor der Verwendung explizit definiert werden. Bei der Definition wird der Datentyp festgelegt und es wird ein Variablenname gewählt.
Beispiel :

```
int i;
i = 5;
i[3] = 7;
i = "Hallo";
```

// Zuweisung ist korrekt
// Anweisung erzeugt beim Compilieren einen Fehler
// Anweisung erzeugt beim Compilieren einen Fehler

Durch die explizite Deklaration werden Programme sicherer, da eine Reihe von Fehlern bereits durch den Compiler erkannt werden. Durch implizite Typumwandlungen können sich aber dennoch Fehler einschleichen.

```
i = 5.6;          // Anweisung erzeugt beim Compilieren eine Warnung
```

Vektoren und Matrizen in C :

```
double x[3];          // Vektor mit 3 Elementen - x[0], x[1], x[2]
double mat[3][4];     // Matrix mit 3 Zeilen und 4 Spalten
                         mat[0][0] ... mat[2][3]
```

Die Größe eines Vektors oder einer Matrix wird bei der Definition festgelegt und kann danach nicht mehr verändert werden!

1.3 MATLAB - Variablen

Bei MATLAB gilt (etwas vereinfacht, später genauer) folgendes :

a) Eine MATLAB-Variable ist immer eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten – jede MATLAB-Variable ist eine n*m-Matrix (ein 2d-Array).

b) Variablen müssen nicht explizit definiert werden – häufig wird eine Variable bei der ersten Verwendung erzeugt z.B. durch eine Wertzuweisung; MATLAB legt dabei die Anzahl der Zeilen und Spalten automatisch fest.

c) Alle Elemente einer Matrix sind vom Typ double, d.h. der Wert jedes Elements einer Matrix ist vom Typ double (64-Bit, ca. 15-16 führende Stellen).

d) Es gibt drei wichtige Spezialfälle:
   1*1 – Matrix - Skalar - Matrix, die genau ein Element besitzt
   1*n – Matrix - Zeilenvektor - Matrix mit genau einer Zeile
   n*1 – Matrix - Spaltenvektor - Matrix mit genau einer Spalte

e) Es gibt viele Operatoren und Funktionen, mit denen Matrizen einfach definiert, initialisiert, verändert oder verarbeitet werden können. Die meisten Operatoren sind bereits für Matrizen definiert.

f) Die Anzahl der Zeilen und Spalten einer Matrix kann sich während des Programmablaufs ändern (beabsichtigt oder unbeabsichtigt aufgrund eines Fehlers). Die Dimension einer Matrix kann vergrößert (Zeilen oder Spalten einfügen) oder verkleinert (Zeilen oder Spalten löschen) werden.

g) Zeilen- und Spaltenindizes beginnen bei 1 (nicht bei 0 wie in C).

1.4 MATLAB – Matrizen : Definition

```
Command Window
>> A = [2,3; 4,5]
A =
     2     3
     4     5
>> x = [6; 7]
x =
     6
     7
>> y = A * x
y =
    33
    59
>> whos
  Name Size     Bytes  Class
  A     2x2        32  double
  x     2x1        16  double
  y     2x1        16  double
```

Alle MATLAB-Variablen sind Matrizen/Arrays !
Die Variable A ist hier eine 2*2 Matrix. Diese Variable wird durch eine Zuweisung erzeugt.
x und y sind Spaltenvektoren (2*1-Matrizen)
[ ] ist der sogenannte Concatenation-Operator
; erzeugt neue Zeile in einem Array
, oder Leerzeichen trennen Spalten in einer Zeile
A = [2 3; 4 5] identisch mit A = [2, 3; 4, 5]
Vektor x wird bei der Initialisierung erzeugt.
Vektor y wird als Ergebnis einer Zuweisung erzeugt.

Der Operator * (Multiplikationsoperator) ist auch für Vektoren und Matrizen definiert (Matrix-Vektormultiplikation aus der Mathematik). Zeilen- und Spaltenzahl der Operanden müssen zueinander passen. Bei einer 1*1 Matrix (Skalar) bewirkt der Operator * eine „ganz normale Multiplikation“.

```
Command Window
>> A = [2,3; 4,5]
A =
     2     3
     4     5
>> A(1,2)
ans =
     3
>> z = A(2,1)
z =
     4
>> A(2,3)
Index exceeds matrix dimension
```

```
Command Window
>> z = [5]
z =
     5
>> z(1,1)
ans =
     5
>> z(1)
ans =
     5
>> z
z =
     5
```

```
Command Window
>> x = [10; 11 ; 12 ]
x =
    10
    11
    12
>> x(2,1)
ans =
    11
>> x(2)
ans =
    11
>> y = [20, 21, 22]
y =
    20    21    22
>> y(1,2)
ans =
    21
>> y(2)
ans =
    21
```

Zugriff auf die Elemente einer Matrix :

`A(zeile, spalte)`

Bei einer `1*1`-Matrix (Skalar) gilt :

`z(1,1) ≡ z(1) ≡ z` und `z=[5] ≡ z = 5`

Bei Spaltenvektoren (`n*1`-Matrix) gilt :

`x(zeile,1) ≡ x(zeile)`

Bei Zeilenvektoren (`1*n`-Matrix) gilt :

`y(1,spalte) ≡ y(spalte)`

linear Indexing !


```
>> x = 2
x =
     2
>> whos x
  Name  Size  Bytes  Class
  x     1x1       8  double
>> x(1)
ans =
     2
>> x(2) = 12
x =
     2    12
>> whos x
  Name  Size  Bytes  Class
  x     1x2      16  double
>> x(2,3) = 17
x =
     2    12     0
     0     0    17
>> whos x
  Name  Size  Bytes  Class
  x     2x3      48  double
```

Die Größe oder Dimension (Anzahl der Zeilen und Spalten) der Variablen `x` wird hier durch geeignete Wertzuweisungen von MATLAB automatisch verändert.

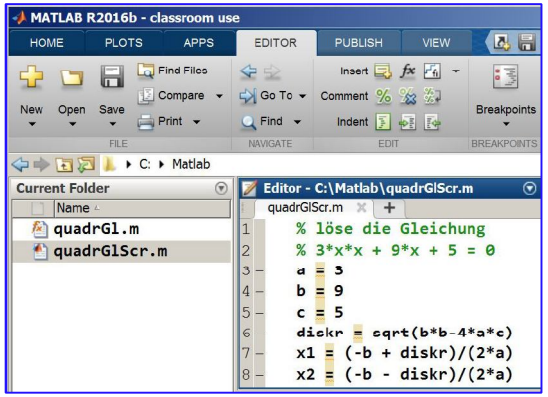
- zuerst ist `x` eine `1*1` Matrix (Skalar)
- dann wird `x` zu einer `1*2` Matrix (Zeilenvektor)
- danach wird `x` zu einer `2*3` Matrix ; bei der Erweiterung von `x` zu einer `2*3` Matrix werden nicht explizit initialisierte Matrixelemente automatisch auf `0` gesetzt

Die automatische Erweiterung von Zeilen oder Spalten kann leicht zu Fehlern führen; Schreibfehler sind oftmals schwer zu finden!

M-Files sind Dateien, die MATLAB-Befehle enthalten. M-Files müssen auf `.m` enden. Es handelt sich um einfache ASCII-Dateien (Text-Dateien), die mit einem beliebigen ASCII-Editor geschrieben werden können. Die MATLAB-IDE enthält bereits einen komfortablen Editor zum Schreiben von M-Files.

Man unterscheidet zwei Typen von M-Files:

- **Skripte**
  Ein MATLAB-Skript enthält eine Folge von Befehlen, die bei der Ausführung des Skripts (Run) nacheinander bearbeitet werden; gibt man den Dateinamen ohne die Endung im Command-Fenster ein, dann werden die Befehle nacheinander ausgeführt, genauso als hätte man die Befehle direkt in das Command-Fenster eingegeben.
  Siehe Beispiel `quadrGlScr.m`
- **Funktionen**
  Eine MATLAB-Funktion erfüllt den gleichen Zweck wie eine Funktion in der Programmiersprache C. Im Normalfall bearbeitet eine Funktion eine ganz bestimmte Aufgabe. Eine Funktion besitzt typischerweise Übergabeparameter und gibt ein oder mehrere Ergebnisse zurück. Der Aufruf einer Funktion erfolgt im Command-Fenster oder innerhalb von anderen Funktionen oder Skripten.
  Siehe Beispiel `quadrGl.m`




```
Command Window
>> quadrGlScr
a =
     3
b =
     9
c =
     5
diskr =
    4.5826
x1 =
   -0.7362
x2 =
   -2.2638
>> help quadrGlScr
  löse die Gleichung
  3*x*x + 9*x + 5 = 0
```

Die Datei mit dem Namen `quadrGlScr.m` ist ein MATLAB-Skript. Es enthält Anweisungen zur Lösung einer quadratischen Gleichung. Der Name der Datei ist frei wählbar, muss aber auf `.m` enden. Das gezeigte Skript besteht aus zwei Kommentarzeilen und sechs Anweisungen. Die Anweisungen werden nacheinander ausgeführt, wenn man den Namen des Skripts - `quadrGlScr` - im Command-Window eingibt. Das Zeichen `%` leitet einen Kommentar ein.
Der Befehl `help M-Filename` zeigt die ersten Kommentarzeilen an.

Editor - C:\Matlab\quadrGl.m

quadrGl.m

```
1  function [x1,x2] = quadrGl(a,b,c)
2  %QUADRGL quad. Gleichung lösen
3  %  [x1,x2] = quadrGl(a,b,c)
4  %  a*x*x + b*x + c = 0
5  diskr = sqrt(b*b-4*a*c);
6  x1 = ( -b + diskr )/(2*a);
7  x2 = ( -b - diskr )/(2*a);
8  end
```

Command Window

```
>> [xa,xb]=quadrGl(3,9,5)
xa =
   -0.7362
xb =
   -2.2638
>> [y1,y2]=quadrGl(3,2,5)
y1 =
  -0.3333 + 1.2472i
y2 =
  -0.3333 - 1.2472i
>> help quadrGl
 quadrGl quad. Gleichung lösen
   [x1,x2] = quadrGl(a,b,c)
   a*x*x + b*x + c = 0
```

Die Datei quadrGl.m enthält die Funktion mit dem Namen quadrGl. Datei- und Funktionsname (siehe Zeile 1 der Funktion) müssen übereinstimmen (bis auf die Endung .m).
Die Funktion berechnet die Lösungen einer quadratischen Gleichung und gibt diese zurück. Beim Aufruf der Funktion werden 3 Parameter übergeben. Auf der linken Seite des Funktionsaufrufes wird festgelegt, in welchen Variablen die beiden Lösungen gespeichert werden. Mit der Funktion lassen sich beliebige quadratische Gleichungen lösen, auch solche, die komplexe Lösungen besitzen.

1. Installieren Sie MATLAB und Simulink auf ihrem Rechner.
2. Probieren Sie alle Beispiele aus dem ersten Kapitel aus, d.h. geben Sie die Befehle am Rechner ein.
3. Schreiben Sie das Skript quadrGlScr.m zur Berechnung der Lösung einer quadratischen Gleichung. Führen Sie das Skript aus.
4. Schreiben Sie die MATLAB-Funktion quadrGl zur Berechnung der Lösung einer quadratischen Gleichung. An die Funktion werden die 3 Koeffizienten der Gleichung übergeben. Die Funktion gibt die beiden (reellen oder komplexen Lösungen zurück.
   Anschließend berechnen Sie mit dieser Funktion die Lösungen der beiden Gleichungen :

   a) $3 \cdot y^2 + 9 \cdot y + 5 = 0$ b) $3 \cdot y^2 + 2 \cdot y + 5 = 0$

   Wie lautet der Aufruf bei Teilaufgabe a), wenn die Ergebnisse in den beiden Variablen y1 und y2 gespeichert werden sollen. Wie lautet der Aufruf bei Teilaufgabe b), wenn die Ergebnisse in z1 und z2 gespeichert werden sollen.

   c) Was passiert, wenn beide Lösungen zusammenfallen? Überlegen Sie sich ein entsprechendes Beispiel. Berechnen Sie dann die Lösungen.

5. Berechnen Sie folgende Matrix-Vektormultiplikation auf zwei Arten :
   - handschriftlich
   - mit Hilfe von MATLAB

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

6. Berechnen Sie folgende Matrix-Vektormultiplikation auf zwei Arten :
   - handschriftlich
   - mit Hilfe eines MATLAB-Skripts

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7. Was passiert, wenn Sie die C-Anweisungen (siehe unten) nach MATLAB „übersetzen“ und ausführen? Erstellen Sie ein MATLAB-Skript mit den Befehlen. Führen Sie das Skript aus.

```
int i;
i = 5;
i[3] = 7;
i = "Hallo";
```

C-Anweisungen

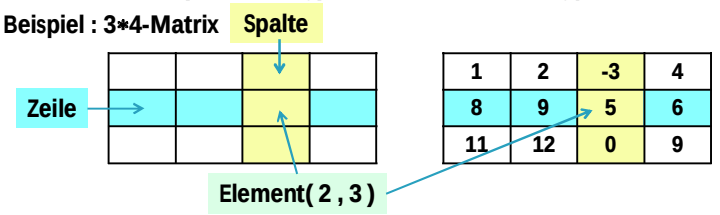
```
i = 5
i(3) = 7
i = 'Hallo'
i(2)
```

MATLAB-Anweisungen

Kapitel 2 Felder - Arrays

Eine `n*m`-Matrix (ein 2d-Array) ist der zentrale Datentyp bei MATLAB.

Beispiel : 3∗4-Matrix



- Alle Elemente einer Matrix besitzen den gleichen Datentyp, d.h. alle Elemente sind vom Typ `double` (oder vom Typ `uint8` , `float` ...)
- Die Elemente einer Matrix sind vom Typ `double`, außer der Typ der Elemente der Matrix wird explizit anders festgelegt.
- Der Zugriff auf ein einzelnes Element einer Matrix erfolgt normalerweise durch Angabe von Zeile (erster Index) und Spalte (zweiter Index) z.B. `A(2,3)`.
- Der Zugriff auf ein Element kann auch mit einem einzigen (linear indexing) Index erfolgen. Hierbei werden die Elemente der Matrix spaltenweise durchnummeriert, beginnend bei 1. Daher gilt im obigen Beispiel :
  `A(2,3)` ≡ `A(8)` `A(3,3)` ≡ `A(9)` `A(1,4)` ≡ `A(10)`

Array oder Feld:

Beide Begriffe bezeichnen ganz allgemein ein mehrdimensionales Objekt.
Ein Element eines n-dimensionalen Arrays wird durch n Indizes
(k1, k2, k3, ... , kn) eindeutig festgelegt (n>=2).

`A(k1, k2, k3, ..., kn)`

Spezielle Arrays:

- **Matrix**
  2-dimensionales Array – 2d-Array – `n*m`-Array oder `n*m`-Matrix
  `A(zeile,spalte)` `A(2,3)` `A(n)` (`A(n)` : linear indexing)
- **Vektor**
  2d-Array mit genau einer Zeile (`1*n`-Array – Zeilenvektor – row vector) oder
  2d-Array mit genau einer Spalte (`n*1`-Array – Spaltenvektor – column vector)
  `A(1,k)` ≡ `A(k)` `A(k,1)` ≡ `A(k)` (`A(k)` : linear indexing)
- **Skalar**
  2d-Array mit genau einer Zeile und einer Spalte (`1*1`-Array)
  `A(1,1)` ≡ `A(1)` ≡ `A`

Der Begriff Matrix wird oft in zwei unterschiedlichen Bedeutungen verwendet:

1.Darstellung mathematischer oder physikalischer Objekte

Drehung in der Ebene : Darstellung durch eine `2*2`-Matrix
Drehung im Raum : Darstellung durch eine `3*3`-Matrix
Drehstreckung : Darstellung durch eine `3*3`-Matrix
Trägheitsmatrix : Darstellung durch eine `3*3`-Matrix
n Gleichungen mit m Unbekannten : `n*m`-Matrix - Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned} 3\cdot x+4\cdot y-5\cdot z&=2\\ 2\cdot x+5\cdot y+6\cdot z&=4\\ 3\cdot x+4\cdot y-7\cdot z&=3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 4\\ 3 \end{pmatrix}$$

Bei diesen Matrizen ist es von Bedeutung, ob sie symmetrisch sind, schiefsymmetrisch, diagonal, quadratisch, ... Für diese Matrizen kann man den Rang bestimmen, Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen oder die Determinante. Diese Eigenschaften einer Matrix haben auch immer eine bestimmte mathematische oder physikalische Bedeutung (z.B. Eigenwert ⇔ Eigenfrequenz).

2.Zusammenfassung verschiedener Daten, damit diese einfach und bequem gespeichert und verarbeitet werden können. Die Begriffe Rang, Determinante oder Eigenvektor machen bei solchen Matrizen keinen Sinn.

2.1 Begriffe : Array – Matrix – Vektor – Skalar

Beispiel : Speichere die Zeit, die Auslenkung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung bei einer gedämpften Schwingung

- Spalte 1 (Zeile 1) : speichert die Zeitpunkte
- Spalte 2 (Zeile 2) : speichert die zugehörige Auslenkung
- Spalte 3 (Zeile 3) : speichert die zugehörige Geschwindigkeit
- Spalte 4 (Zeile 4) : speichert die zugehörige Beschleunigung

t	x(t)	v(t)	a(t)
0	-2.0	0.0	19.74
0.3	-1.21	4.72	9.62
0.7	0.87	4.3	-10.7
0.9	1.47	1.60	-15.3
...	...	...	...

0	0.3	0.7	0.9	...	t
-2.0	-1.21	0.87	1.47	...	x(t)
0.0	4.72	4.30	1.60	...	v(t)
19.74	9.62	-10.7	-15.3	...	a(t)

Bei n Zeitpunkten ergibt sich eine n*4-Matrix oder eine 4*n-Matrix. Hinter dieser Matrix steckt kein mathematisches oder physikalisches Objekt.
Man könnte diese Informationen auch in 4 einzelnen Vektoren abspeichern. Das ist oft unpraktisch, wenn man z.B. die Werte an eine Funktion übergeben muss oder die Werte als Ergebnis eines Funktionsaufrufes zurückgeben möchte.
Die Matrix speichert nur Daten.

Kapitel 2 Felder - Arrays

2.2.1 Explizite Angabe der Elemente

Matrizen mit wenigen Elementen werden zeilenweise durch explizite Angabe der Werte der einzelnen Elemente erzeugt. Dabei wird der Concatenation – Operator [ ] verwendet (to concatenate – aneinanderhängen, verbinden).

- Zeilen werden durch einen Semikolon ; voneinander getrennt
- Elemente in einer Zeile werden durch , oder Space (Leerzeichen) getrennt

```
>> A = [ 1,2,-3,4; 8,9,5,6; 11 12 0 9 ]
A =
     1     2    -3     4
     8     9     5     6
    11    12     0     9
>> A = [ 1, 2, -3, 4;
         8, 9,  5, 6;
        11  12  0  9 ]
A =
     1     2    -3     4
     8     9     5     6
    11    12     0     9
>> x = [ 1 4 8 ];
>> y = [ 2; 5; 9 ];
```

Matrix :
A : 3*4-Matrix

Vektoren :
x : Zeilenvektor - 1*3-Vektor
y : Spaltenvektor - 3*1-Vektor

2.2.2 Zugriff auf nicht-existierende Elemente

Es muss zwischen lesendem und schreibendem Zugriff unterschieden werden.
Der lesende Zugriff auf ein Element eines Arrays, das nicht existiert, erzeugt einen Fehler. Lesender Zugriff bedeutet, dass das (nicht existierende) Element auf der rechten Seite des Zuweisungsoperators steht.

```
>> B = [ 1, 2,-3, 4;  8, 9, 5, 6 ]
B =  1     2    -3     4
     8     9     5     6
>> x = 1 + B(3,2)
Attempted to access B(3,2); index out of
bounds because size(B)=[2,4].
```

Steht das nicht existierende Element dagegen links vom Zuweisungsoperator (schreibender Zugriff), wird das Array automatisch erweitert. Es wird der Wert der rechten Seite zugewiesen. Eingefügte Elemente ohne explizite Wertzuweisung werden mit 0 belegt. Die Größe der Matrix ändert sich damit!!

```
>> B(3,2) = 11
B =
     1     2    -3     4
     8     9     5     6
     0    11     0     0
```

1	2	-3	4
8	9	5	6

1	2	-3	4
8	9	5	6
0	11	0	0

K2_09 **2.2.3 Neues Array aus vorhandenen Arrays erzeugen**

Mit dem Concatenation-Operator [ ] können aus bereits vorhandenen Arrays (meist Vektoren oder Matrizen) neue Arrays gebildet werden. Es gibt „horizontal concatenation [,]“ und „vertical concatenation [;]“.

```
>> A = [ 1, 2; 3, 4 ]
A =
     1     2
     3     4
>> B = [ A, A ]
B =
     1     2     1     2
     3     4     3     4
>> C = [ A; A ]
C =
     1     2
     3     4
     1     2
     3     4
```

```
>> D = [ A, 2*A; 3*A, 4*A ]
D =
     1     2     2     4
     3     4     6     8
     3     6     4     8
     9    12    12    16
```

Beachte :

im Ausdruck 2*A werden alle Elemente der Matrix A mit 2 multipliziert !

```
>> a1 = [ 1, 2]
>> a2 = [ 3, 4]
>> x = [ a1; a2]
>> y = [ a1  a2]
```

Frage :

Was ist x ?

Was ist y ?

K2_10 **2.2.4 Colon-Operator**

Colon-Operator : `start:step:end` (`start:step:end`)

`start:end` (`start:end`)

Der Colon-Operator (Doppelpunkt-Operator) erzeugt einen Zeilenvektor „ von `start` bis `end` mit einer Schrittweite von `step` (Default ist 1) “

```
>> x = 1:5
x =
     1     2     3     4     5
>> y = 1:2:10
y =
     1     3     5     7     9
>> z = 0:pi/4:pi
z =
         0    0.7854    1.5708    2.3562    3.1416
>> x = 3:5
x =
     3     4     5
>> x = 5:-2:1
x =
     5     3     1
```


K2_11 **2.2.4 Colon-Operator**

Beispiele :

a) Erzeuge einen Vektor x , der die Zahlen 100, 99, ... , 1 speichert.

b) Erzeuge einen Vektor x mit den Zahlen von 50 bis -50 bei einer Schrittweite von 5. Geben Sie die Anzahl der Elemente von x aus.

c) Speichere alle Winkel von 0 bis 180° (Abstand 1°) in einem Vektor. Die Winkel sollen im Bogenmaß gespeichert werden.

d) Geben Sie das letzte Elemente des Vektors x aus.

e) Fügen Sie dem Vektor x noch ein weiteres Element mit dem Wert 120 hinzu.

K2_12 **2.2.5 Zugriff auf Teile eines Vektors**

Der Colon-Operator wird auch verwendet, um auf Teile einer Matrix zuzugreifen.

```
>> A=[ 11,12,13,14; 21,22,23,24; 31,32,33,34 ]
A =
    11    12    13    14
    21    22    23    24
    31    32    33    34
>> x = A(2,:)
x =
    21    22    23    24
>> y = A(:,3)
y =
    13
    23
    33
>> B = A(1:2,2:4)
B =
    12    13    14
    22    23    24
```

: (ohne `start` und `end`) steht für „alle Elemente“ einer Zeile oder Spalte

Der Zeilenvektor x wird aus der zweiten Zeile der Matrix A gebildet

Der Spaltenvektor y wird aus der dritten Spalte der Matrix A gebildet.

Matrix B wird aus den Zeilen 1 bis 2 und den Spalten 2 bis 4 der Matrix A gebildet.

K2_13

2.2.5 Zugriff auf Teile eines Vektors

Weitere nützliche Funktionen und Operatoren für Vektoren

`x(3:7) = 0` `x([3 4 5 6 7]) = 0` `x([3 16 23]) = 0`

Die Elemente `x(3), x(4) ... x(7)` auf `0` setzen bzw. die Elemente `x(3), x(16)` und `x(23)` gleich 0 setzen.

`x(:) = 3`

Setze alle Elemente des Vektors `x` auf `3`. Der Colon-Operator ohne Angabe von `anfang` und `ende` bezeichnet alle Elemente. Größe von x unverändert.

`x = 2`

Erzeuge eine 1*1-Matrix und setze den Wert auf 2. Größe von x ändert sich.

`x(3:8) = []`

Die Elemente `x(3), x(4) ... x(8)` aus dem Vektor entfernen - löschen

`x(:) = []` oder `x = []`

Alle Elemente aus dem Vektor löschen – `x` ist dann eine `0*0`-Matrix

`x = linspace(anfang, ende, n)`

Erzeugt einen Zeilenvektor mit n Elementen. `x(1)=anfang, x(n)=ende`
Die anderen Werte liegen äquidistant zwischen `anfang` und `ende`.

```
x = linspace(1,2,2)        x = linspace(0,pi,181)
x = linspace(1,2,10)       x = linspace(1,2,11)
```


K2_14

2.2.6 Transponieren eines Vektors oder Arrays

Die Transponierte einer Matrix bilden : Vertausche Zeilen und Spalten der Matrix

```
>> A=[1,2,3; 4,5,6; 7,8,9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> B = A'
B =
     1     4     7
     2     5     8
     3     6     9
```

```
>> A=[1,2,3; 4,5,6]
A =
   1   2   3
   4   5   6
>> B = A'
B =
   1     4
   2     5
   3     6
>> B = transpose(A)
```

A' ≡ transpose(A)

Der Operator ' und die Funktion `transpose` transponieren ein 2d-Array, d.h. spiegeln die Elemente an der Hauptdiagonalen und wandeln eine `n*m`-Matrix in eine `m*n`-Matrix um.

Beachte : Bei Vektoren werden Zeilenvektoren in Spaltenvektoren umgewandelt und umgekehrt.

```
>> x=[1, 2]
x =
   1   2
>> x'
ans =
     1
     2
```

```
>> y=[2; 3]
y =
     2
     3
>> y = y'
y =
     2     3
```


K2_15

2.3 Operatoren und Arrays

Die meisten Operatoren sind sowohl für Skalare als auch Arrays definiert. Ebenso können viele Funktionen auch auf Arrays angewendet werden. Operatoren und Funktionen wirken dabei elementweise (Ausnahme: Multiplikation und Division).

```
>> A = [1,2; 3,4]
A =
     1     2
     3     4
>> sind(A)
ans =
   0.0175    0.0349
   0.0523   -0.0698
>> B = 5*A + 2
B =
     7    12
    17    22
>> C = A + B
C =
     8    14
    20    26
```

$$\begin{bmatrix} \text{sind}(1) & \text{sind}(2) \\ \text{sind}(3) & \text{sind}(4) \end{bmatrix}$$

Die Multiplikation eines Arrays mit einem Skalar erfolgt elementweise, ebenso die Addition eines Arrays mit einem Skalar.

`B(i,j) = 5*A(i,j)+ 2` für alle `i,j`

`C(i,j) = A(i,j)+ B(i,j)` für alle `i,j`

```
> x = [ 0 pi/6 pi/4 pi/3 ];
> y = sin(x)
```

Frage : Welche Werte besitzen die Elemente von y ?

K2_16

2.3 Operatoren und Arrays

Arrays können nur dann addiert (analoges gilt für andere Operationen, die elementweise wirken) werden, wenn die Dimensionen der Operanden übereinstimmen, außer man addiert einen Skalar. Skalare Größen werden stets elementweise auf Arrays angewendet.

```
>> A = [ 1, 2; 3, 4 ]
A =
     1     2
     3     4
>> B = A + 2
B =
     3     4
     5     6
```

```
>> x = [2, 7]
x =
     2     7
>> y = 3 + x
y =
     5    10
```

```
>> B = A + x(1)
B =
     3     4
     5     6
```

```
>> A + x
Error using  +
Matrix dimensions must agree.
```

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$ $c = 5$

Es gibt verschiedenen Arten der Multiplikation :

1) `c*A =`

2) `A*B =`

3) `A.*B =`

4) `A*x =`

5) `x*y =`

6) `y*x =`

7) `A^3 =`

8) `A.^3 =`

Die Multiplikation von zwei Skalaren ist einfach und eindeutig. Multipliziert man dagegen Arrays miteinander oder multipliziert man ein Array mit einem Skalar muss genau definiert werden, was man darunter versteht. MATLAB kennt verschiedene Arten der Multiplikation, die durch unterschiedliche Operatoren gekennzeichnet werden :

- **Matrixmultiplikation** : C = A * B mit dem Operator *
  „bekannte Matrixmultiplikation aus der Linearen Algebra“
  Die Matrixmultiplikation ist nur für 2d-Arrays definiert und auch nur, wenn Zeilenzahl und Spaltenzahl bestimmte Bedingungen erfüllen. Das Ergebnis der Multiplikation ist wieder eine Matrix.
  Ebenso : Potenz (^) und Division (/ - Multiplikation mit der Inversen)
- **Elementweise Multiplikation** : C = A .* B mit dem Operator .*
  Die elementweise Multiplikation ist für beliebige Arrays definiert, aber nur, wenn die Dimensionen der beiden Arrays übereinstimmen. Es werden jeweils die entsprechenden Elemente der beiden Arrays miteinander multipliziert.
  Ebenso : elementweise Potenz (.^) und elementweise Division (./)
- **Multiplikation eines Arrays mit einem Skalar**
  Jedes Element des Arrays wird mit dem Skalar multipliziert. Es gibt in diesem Fall keinen Unterschied zwischen den Operatoren * und .* .

Multiplikation von Matrizen * :

Das Produkt A*B der beiden Matrizen A und B ist nur dann definiert, wenn A genauso viele Spalten besitzt wie B Zeilen, also

- ist A eine n * k-Matrix und B eine k * m- Matrix, dann ist das Produkt der beiden Matrizen C = A * B definiert und das Ergebnis ist eine n * m-Matrix.
- die Elemente von C berechnen sich wie folgt : $C(p,q) = \sum_{m=1}^{k} A(p,m) * B(m,q)$

  d.h. das Element C (p , q) ist das Skalarprodukt aus dem p-ten Zeilenvektor von A mit dem q-ten Spaltenvektor von B. Beachte : Der Zeilenvektor und der Spaltenvektor müssen die gleiche Länge besitzen (hier jeweils k Elemente) !

In dem Ausdruck C = A * B führt MATLAB die Matrixmultiplikation automatisch durch. Bei der Programmierung in C sind hierfür 3 geschachtelte Schleifen notwendig.

Beachte :

- Ist das Matrixprodukt A * B definiert, dann ist im allgemeinen das Produkt B * A nicht definiert, außer wenn n == m.
- Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. im allgemeinen gilt
  $A * B \neq B * A$

Beispiel Matrixmultiplikation :

$C(p,q) = \sum_{m=1}^{k} A(p,m) * B(m,q)$ `C(p,q) = A(p,:) * B(:,q)`

Eine 3 * 2-Matrix A wird mit einer 2 * 4-Matrix B multipliziert.
Das Ergebnis ist eine 3 *4-Matrix C !

B(:,3)

A(2,:)

A(1,1)	A(1,2)
A(2,1)	A(2,2)
A(3,1)	A(3,2)

B(1,2)	B(1,2)	B(1,3)	B(1,4)
B(2,1)	B(2,2)	B(2,3)	B(2,4)

C(1,1)	C(1,2)	C(1,3)	C(1,4)
C(2,1)	C(2,2)	C(2,3)	C(2,4)
C(3,1)	C(3,2)	C(3,3)	C(3,4)

1	2
3	4
5	6

10	11	12	13
20	21	22	23

50	53		
110			
170			

C(2,3) =

2.4 Multiplikation von Vektoren und Matrizen

Elementweise Multiplikation von Matrizen mit dem Operator .*

Zwei Arrays A und B können elementweise miteinander multipliziert werden, wenn die beiden Arrays die gleiche Dimension besitzen. Der zugehörige MATLAB-Operator hierfür ist **.*** .

Weiterhin kann jedes beliebige Array mit einer Zahl (Skalar) multipliziert werden. Hierfür werden die Operatoren **.*** oder ***** verwendet – beide Operatoren haben die gleiche Wirkung.

Elementweise Multiplikation : `C = A .* B`

Beispiele :

A = | 1 | 2 |
| 3 | 4 |

B = | 10 | 11 |
| 20 | 21 |

C = A .* B | 10 | 22 |
| 60 | 84 |

`D = 5*A` `D = A*5` `D = 5.*A` `D = A.*5` ⇒ D = | 5 | 10 |
| 15 | 20 |

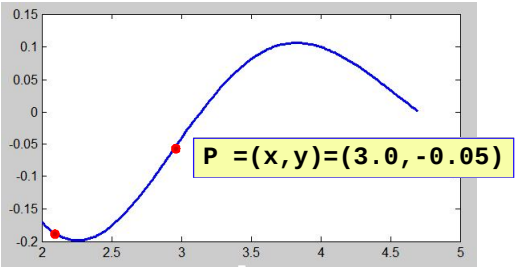
2.5 Vektoren für die Funktion plot erzeugen

Aufgabe : Zeichne eine Funktion y = f(x) in einem vorgegebenen Bereich.

`plot( x, y )`

Der Funktion `plot` werden im einfachsten Fall zwei Vektoren (Zeilenvektoren oder Spaltenvektoren) mit je n Elementen als Parameter übergeben. Die Funktion plot zeichnet dann eine Kurve durch die Punkte `( x(k), y(k) )` von `k = 1...n`.

x	y
2.00	-0.1700
2.02	-0.1744
2.04	-0.1783
...	...
4.70	0.0019



Frage :

Wie kann man auf einfache Weise solche Vektoren erzeugen und verarbeiten?

Teilaufgaben 1) Vektor x erzeugen – alle Elemente besitzen den gleichen Abstand
2) Funktionswerte y(i) in Abhängigkeit von x(i) berechnen

2.5 Vektoren für die Funktion plot erzeugen

Aufgaben :

1. Erzeuge einen Vektor x mit äquidistanten Elementen im Bereich zwischen 2.0 und 4.7. Der Abstand aufeinanderfolgender Werte des Vektors soll 0.02 sein. (2.00, 2.02, 2.04, ... , 4.68, 4.70). Wie viele Elemente besitzt der Vektor.

2. Berechne die zugehörigen Funktionswerte für folgende Funktionen :

$y = 2 \cdot x \quad y = x^2 \quad y = \sin(x) \quad y = e^{-x} \quad y = e^{-x^2} \quad y = x^2 \cdot \sin(1/x)$

3. Hausaufgabe : Zeichnen Sie die Funktionen.

2.6 Skalarprodukt

Mathematik : Skalarprodukt (dot product, inner product) von x und y

$$x = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad y = \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix}$$

$$s = x \cdot y = x(1) \cdot y(1) + x(2) \cdot y(2) + x(3) \cdot y(3) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\varphi)$$

MATLAB :

`x = [ 1; 2; 3 ]` 3 * 1 Array `a = [ 1, 2, 3 ]` 1 * 3 Array
`y = [ 4; 5; 6 ]` 3 * 1 Array `b = [ 4, 5, 6 ]` 1 * 3 Array

Das Skalarprodukt berechnen :

1) Mit Hilfe der Transponierten eines Vektors (Matrixmultiplikation)
`s = x' * y` oder `s = y' * x`
Die Transponierte eines Spaltenvektors ist ein Zeilenvektor. Multiplikation einer 1*3 Matrix mit einer 3*1 Matrix ergibt eine 1*1 Matrix (Skalar).
Sind a und b Zeilenvektoren, dann lautet die Formel : `s =`

2) Die Funktion `dot` verwenden
`s = dot(x,y)` oder `s = dot(y,x)`

```
Command Window
>> help dot
 dot  Vector dot product.
    C = dot(A,B) returns the scalar product of the vectors A and B.
    A and B must be vectors of the same length.  When A and B are both
    column vectors, dot(A,B) is the same as A'*B.
```

Aufgabe 1

Gegeben ist der Vektor `x = [1, 2, 3, 4, 5]`

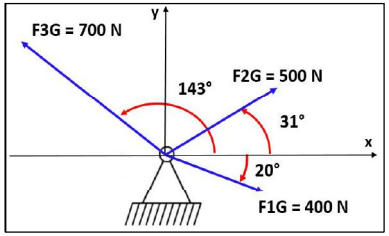
Welche Wirkung haben die folgenden Befehle ?

```
1.  x(2:3) = -1
2.  x(2:3) = 2:3
3.  x(2:3) = []
4.  x([2,4]) = [20,30]
5.  x(:) = -1
6.  x(end) = -1
7.  x = -1
8.  x(1) = -1
9.  x(1,1) = -1
10. x = x(2)
11. x = 2:3
12. x = linspace(0,5,5)
13. z = x'*x
14. z = x*x'
15. z = x*x
16. z = x.*x
17. z = 1./x
18. z = x.^2./x
19. z = x./x
20. z = (1:5) + (5:-1:1)
21. z = 1:5+5:1
```

Überlegen Sie sich zuerst die Lösung. Geben Sie danach die Befehle ein.
Schreiben Sie dazu ein geeignetes Skript.

Aufgabe 2 :

Auf ein Festlager wirken drei Kräfte wie im Bild rechts dargestellt.
Schreiben Sie ein MATLAB-Skript zur Berechnung der Gesamtkraft F. Geben Sie den Betrag der Gesamtkraft aus. Berechnen Sie den Winkel, den die Gesamtkraft mit der x-Achse einschließt und geben Sie diesen in Grad aus.



Ein Beispiel, wie die Ausgabe aussehen könnte, finden Sie hier:

```
Gesamtkraft: 594.956198
Winkel: 65.638402
```

Ergänzen Sie das MATLAB-Skript rechts.
Verwenden Sie zur Berechnung der Lösung die Variablen, die bereits definiert sind.

```
F1G = 400;
F2G = 500;
F3G = 700;
w1 = -20;
w2 = 31;
w3 = 143;
. . .
```


Aufgabe 3 : MATLAB besitzt eine Vielzahl von Funktionen, um spezielle Arrays (häufig Matrizen) zu erzeugen :

`zeros`	Erzeugt ein Array, bei dem alle Elemente auf 0 gesetzt werden.
`ones`	Erzeugt ein Array, bei dem alle Elemente auf 1 gesetzt werden.
`eye`	Einheitsmatrix : Elemente auf der Diagonalen sind 1, alle anderen 0
`diag`	Diagonalmatrix erzeugen – Werte auf der Diagonalen vorgeben.
`rand`	Array mit zufälligen Werten erzeugen; die Werte der Elemente sind Zufallszahlen zwischen 0 und 1 (gleichverteilt, ohne die Grenzen 0 und 1)
`randn`	Die Werte aller Elemente sind Zufallszahlen einer Normalverteilung

Es wird erwartet, dass Sie diese Funktionen in der Prüfung anwenden können.

```
> A = zeros(2,3)
A =
     0     0     0
     0     0     0
> B = ones(2)
B =
     1     1
     1     1
```

```
> A = eye(3)
A =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
> B = eye(2,3)
B =
     1     0     0
     0     1     0
```

```
> A = diag([3,2,5])
A =
     3     0     0
     0     2     0
     0     0     5
> B = rand(2,2)
B =
    0.2695    0.4469
    0.9963    0.1528
```


Erzeugen Sie die folgende Matrizen mit jeweils einem Befehl. Geben Sie die Werte der Elemente nicht explizit ein. Hinweis : Verwenden Sie die Funktionen `ones`, `zeros`, ..., den Concatentation-Operator `[]`, den Colon-Operator.

```
A =
     6     8
     6     8
     6     8
     6     8
     6     8
```

```
B =
     1     1     1     1
     1     1     1     1
     1     1     1     1
     8     6     4     2
```

```
C =
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
```

```
D =
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
     0     0     0     1     1
     0     0     0     1     1
     0     0     0     1     1
```

2.7 Hausaufgaben – Aufgabe 3

```
>> help zeros
 zeros  Zeros array.
  zeros(N) is an N-by-N matrix of zeros.

  zeros(M,N) or zeros([M,N]) is an M-by-N matrix of zeros.

  zeros(M,N,P,...) or zeros([M N P ...]) is an
       M-by-N-by-P-by-... array of zeros.

  zeros(SIZE(A)) is the same size as A and all zeros.

  zeros with no arguments is the scalar 0.

  zeros(..., CLASSNAME) is an array of zeros of class
       specified by CLASSNAME.

  Note: The size inputs M, N, and P... should be non-
    negative integers. Negative integers are treated as 0.

  Example:
      x = zeros(2,3,'int8');
```


2.7 Hausaufgaben – Aufgabe 4

Aufgabe 4 : Machen Sie sich mit den folgenden Funktionen vertraut.

`length(x)`	Die Anzahl der Elemente eines Vektors („Länge“) zurückgeben. Gilt für Zeilen- und Spaltenvektoren - vergleiche end
`[n,m]=size(A)`	Anzahl der Zeilen (n) und Spalten (m) der Matrix A zurückgeben
`k = size(A)`	Was ist die Größe k ? Welchen Wert besitzt k, wenn A eine 3*4-Matrix ist?
`p = size(x)`	Welchen Wert hat die Größe p, wenn x ein Zeilenvektor mit 5 Elementen ist? Was ändert sich, wenn x ein Spaltenvektor mit 5 Elementen ist?
`mean(x)`	Ist x ein Vektor (Zeilen oder Spaltenvektor), dann wird der Mittelwert (der Summe der Elemente) des Vektors x zurückgegeben.
`mean(A)` `mean(A,1)`	Ist A eine Matrix, dann werden die Mittelwerte der einzelnen Spalten von A berechnet und in einem Zeilenvektor gespeichert. Der Zeilenvektor wird als Ergebnis zurückgegeben.
`mean(A,2)`	Die Mittelwerte der einzelnen Zeilen der Matrix A werden berechnet und in einem Spaltenvektor gespeichert. Der Spaltenvektor wird als Ergebnis zurückgegeben.

Frage : Was ergeben folgende Anweisungen?

```
x=[2;4;9];
mean(x)
mean(x,2)
```


2.7 Hausaufgaben – Aufgabe 4

`sum(x)`	Ist x ein Vektor (Zeilen oder Spaltenvektor), dann wird die Summe der Elemente von x berechnet und zurückgegeben.
`sum(A)` `sum(A,1)`	Die Summe der einzelnen Spalten einer Matrix A berechnen und das Ergebnis als Zeilenvektor zurückgeben.
`sum(A,2)`	Summe der Zeilen einer Matrix A zurückgeben - Spaltenvektor
`max(x)`	Ist x ein Vektor, dann den Wert des größten Elements zurückgeben. Ist x eine Matrix, dann werden die Maxima der einzelnen Spalten berechnet und das Ergebnis wird als Zeilenvektor zurückgeben.
`max(x,y)`	Eine Matrix mit den Maxima von x und y zurückgeben (Maxima jeweils elementweise berechnen) - x oder y können auch Skalare sein
`max(x,[],2)`	Ist x eine Matrix, dann gibt max einen Spaltenvektor zurück, der die Maxima der Elemente der einzelnen Zeilen der Matrix enthält
`sort(x)`	Die Elemente eines Vektors x aufsteigend sortieren; bei Matrizen werden die Spalten aufsteigend sortiert.
`sort(x,DIM,MODE)`	`MODE='ascend'` (aufsteigend) `'descend'` (absteigend sortiert) `DIM=1` spaltenweise, `DIM=2` zeilenweise sortieren

Frage : Wie wird das größte Element einer Matrix A berechnet ?

Was berechnet der nebenstehende Ausdruck?
Wie kann der Ausdruck vereinfacht werden?

```
max(max(A,[],2))
```

Kapitel 3 – M-Files : Skripte und Funktionen

Um in MATLAB zu programmieren gibt zwei Möglichkeiten.

- MATLAB-Skript
- MATLAB-Funktion

In beiden Fällen werden die MATLAB-Befehle in einem sogenannten M-File gespeichert - eine Text-Datei (ASCII-Datei) mit der Endung `.m`. Diese Befehle können danach ausgeführt werden.

MATLAB-Skript

- Für ein Skript gibt es keine Entsprechung in der Programmiersprache C
- Ein Skript besitzt keine Parameter und keine Rückgabewerte; wird nicht durch das Schlüsselwort `function` eingeleitet
- Ein Skript kann direkt auf Variablen des MATLAB-Workspace zugreifen

MATLAB-Funktion

- Besitzt ähnliche Eigenschaften wie eine Funktion in der Programmiersprache C
- Besitzt Parameter und Rückgabewerte; wird durch das Schlüsselwort `function` eingeleitet
- Besitzt eigene lokale Variablen und kann nicht direkt auf die Variablen des MATLAB-Workspace zugreifen

Ein MATLAB-Skript enthält eine Folge von MATLAB-Befehlen.

Wird ein Skript ausgeführt, dann werden die Befehle im Skript nacheinander abgearbeitet, genauso als würde man die Befehle direkt im Command-Window nacheinander eingeben. Ein Skript speichert also MATLAB-Befehle, die hintereinander ausgeführt werden.

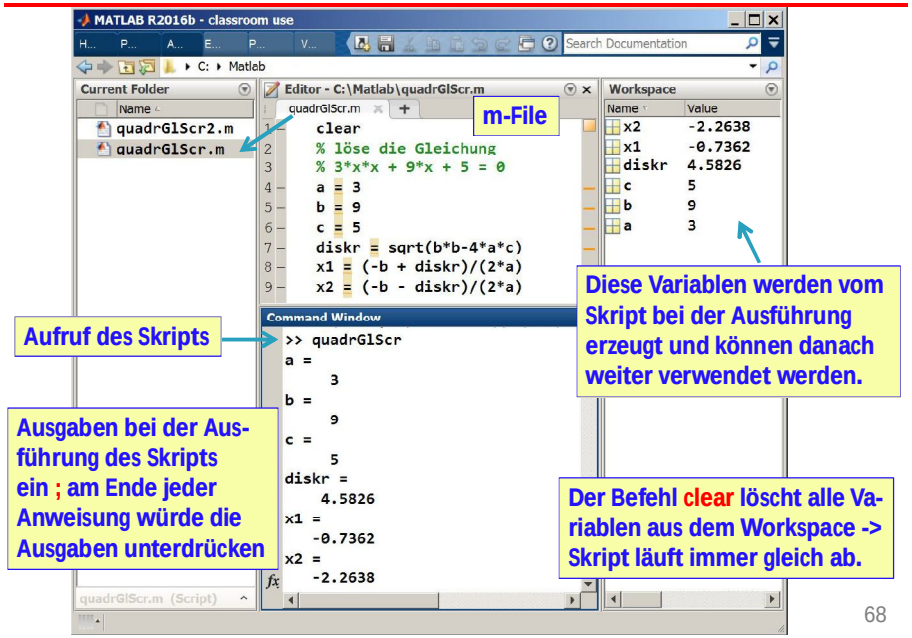
Ein Skript wird in einer ASCII-Datei gespeichert, deren Name auf `.m` endet.

Ein Skript kann auf verschiedene Arten gestartet/aufgerufen/ausgeführt werden :

- Name des Skripts im Command-Window eingeben
- Skript im Current-Folder-Window selektieren und in das Command-Window ziehen oder Kontext-Menu öffnen und Menüpunkt Run wählen
- Über das Menü oder die Toolbar des Editors – Run wählen
- Aufruf eines Skripts in einem anderen Skript

Wichtig : Ein Skript hat Zugriff auf den aktuellen MATLAB-Workspace !

Ein MATLAB-Skript darf alle Variablen verwenden, die im aktuellen Workspace vorhanden sind (d.h. während des Ablaufs des Skripts). Ein Skript kann Variablen aus dem Workspace lesen, verändern oder löschen oder auch neue Variablen erzeugen. Wird ein Skript zweimal hintereinander ausgeführt, können die Ergebnisse unterschiedlich sein, da sich der Workspace verändert haben kann.



Kapitel 3 – M-Files : Skripte und Funktionen

Schreibe eine Funktion zur Berechnung des Kreisumfangs – Rufe die Funktion auf

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double umfang(double r);
int main(void)
{
  double umf, r=3.0;
  umf = umfang(r);
  printf("Umfang=%f\n",umf);
  return 0;
}
double umfang(double r)
{
  double erg;
  erg = 2 * M_PI * r;
  return erg;
}
```

C-Programm

- Die Funktion umfang besitzt einen Parameter vom Typ double und gibt einen Wert vom Typ double zurück.
- Die Typen der Parameter und der Typ des Rückgabewertes werden im Funktionskopf festgelegt.
- Eine Funktion wird von der main-Funktion oder einer anderen Funktion aufgerufen.
- Variablen, die innerhalb einer Funktion oder im Funktionskopf definiert werden, sind lokale Variablen. Diese Variablen sind nur innerhalb der Funktion sichtbar.
- Die Variablen r in den Funktionen main und umfang sind zwei verschiedene Variablen, die nur den gleichen Namen besitzen.

Mehrere Rückgabewerte in einem C-Programm - Umfang und Fläche
In C müssen hierzu Zeiger oder globale Variablen verwendet werden !

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
void kreis(double r, double *zumf, double *zfl);
int main(void)
{
  double umf, fl;
  kreis(3.0, &umf, &fl);
  printf("Umfang = %f\n", umf);
  printf("Fläche = %f\n", &fl);
  return 0;
}
void kreis(double r, double *zumf, double *zfl)
{
  *zumf = 2 * M_PI * r;
  *zfl =  M_PI * r * r;
}
```



```
function [out1, out2, ...] = Funktionsname(in1, in2, ...)
% Beschreibung - Hilfetext
Anweisungen
end
```

Eine Funktion wird in einer Datei gespeichert, die den gleichen Namen besitzt wie die Funktion selbst. Als Dateiendung muss `.m` verwendet werden.
Eine Funktion `euler` muss also in der Datei `euler.m` gespeichert werden.
Eine Funktion kann

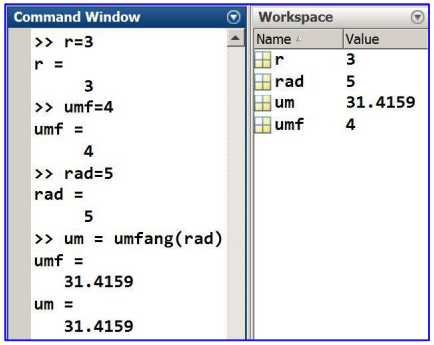
- keinen, einen oder mehrere Parameter besitzen (hier `in1, in2, . . .` genannt)
- keinen, einen oder mehrere Rückgabewerte oder Ergebnisse besitzen (hier `out1, out2, . . .` genannt)

Wichtig : Parameter und Rückgabewerte haben keine Typinformationen
Eine Funktion hat keinen direkten Zugriff auf den Workspace

Eine MATLAB-Funktion kann deshalb keine Variablen aus dem Workspace direkt verändern. Eine Funktion besitzt einen „eigenen Workspace“.

K3_09

3.2.2 Aufbau einer Funktion




```
function umf = umfang( r )
   umf = 2*pi*r
end
```

Beide Funktionen arbeiten vollkommen identisch!

```
function a = umfang( b )
   a = 2*pi*b
end
```

Die Funktion umfang besitzt eigene lokale Variablen (eigenen Workspace). Diese Variablen haben nichts mit den Variablen aus dem ‚normalen' MATLAB-Workspace zu tun. Nur über Funktionsparameter und Rückgabewerte können Werte zwischen den beiden Workspaces ausgetauscht werden.

Werden die Variablen in der Funktion umfang umbenannt (hier r -> b und umf->a), ändert sich an der Funktion umfang überhaupt nichts!

K3_10

3.2.2 Aufbau einer Funktion

Parameter, die bei der Definition einer Funktion in einem M-File im Funktionskopf angegeben werden, bezeichnet man als „Formalparameter". Diese Parameter sind zunächst nur Platzhalter und haben keine definierten Werte. Die Parameter beschreiben, wie eine Funktion aufgerufen werden muss. Erst wenn eine Funktion aufgerufen wird, werden an diese Variablen konkrete Werte zugewiesen (Aktualparameter).

Funktionen haben eine eigene Arbeitsumgebung und besitzen keinen direkten Zugriff auf den Workspace, der im Command-Window verwendet wird. Insbesondere sind die Variablen aus dem Workspace nicht sichtbar. Variablen aus dem MATLAB-Workspace können von einer Funktion aus nicht direkt verändert werden.

Parameter, Rückgabewerte und Variablen innerhalb einer Funktion sind lokale Variablen, die nur innerhalb der Funktion bekannt sind. Variablen mit gleichen Namen, die in anderen Funktionen oder im Workspace definiert sind, haben mit nichts miteinander zu tun.

Beim Aufruf einer Funktion werden keine Variablen übergeben - es werden nur die Werte kopiert. Bei einem Funktionsaufruf werden den Formalparametern aktuelle Werte zugewiesen. Mit diesen Werten wird die Funktion dann abgearbeitet.

K3_11

3.2.3 Funktionsnamen

Für Funktionsnamen gelten die gleichen Regeln wie für Variablennamen

- Ein Name beginnt mit einem Buchstaben; danach können Buchstaben, Ziffern oder der Unterstrich _ folgen; keine Umlaute verwenden !
- Bis zu einer Länge von 31 Zeichen sind Namen eindeutig
- MATLAB unterscheidet Groß- und Kleinschreibung

Konvention : für Funktionsnamen werden nur Kleinbuchstaben verwendet

Beachte :

Eine Funktion kann mehrmals (unterschiedlich) definiert sein; ebenso kann es eine Variable im Workspace geben, die den gleichen Namen wie eine Funktion besitzt (siehe Calling Functions) -> Auflösungsproblematik

"Before assuming that a name should match a function, MATLAB checks the current workspace to see if it matches a variable name. If MATLAB finds a match, it stops the search."

Auflösungsreihenfolge :

Variable -> Nested Functions -> Sub-Functions -> Private Functions

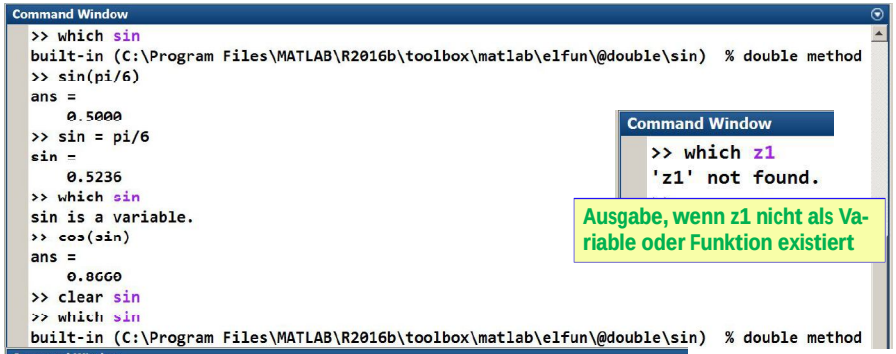
Namen von Funktionen müssen sehr sorgfältig gewählt werden!

Frage : Warum sollte man keine Variable mit dem Namen `sin` definieren?
Warum sollte man einem m-File nicht den Namen `exp.m` geben ?

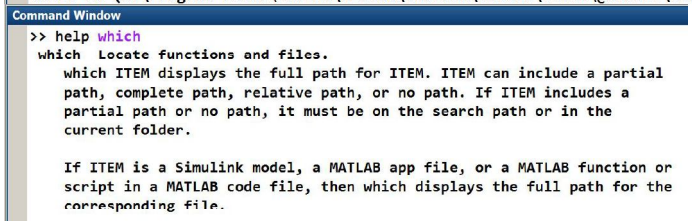
K3_12

3.2.3 Funktionsnamen

Der Befehl `which` zeigt an, ob ein Name bekannt ist (verwendet wird) und ob es sich um eine Variable oder eine Funktion handelt.



Ausgabe, wenn z1 nicht als Variable oder Funktion existiert



K3_13

3.2.4 Dokumentation einer Funktion

Die Beschreibung (Hilfe-Text) einer Funktion wird entweder in den Zeilen vor oder nach dem Schlüsselwort `function` angegeben. Mehrere Zeilen sind erlaubt. Alle Zeilen müssen mit `%` beginnen.

```
help funktionsname
```

```
% Die Funktion ...
%
function
```

```
function
% Die Funktion ...
%
```

Der Befehl `help` zeigt die Beschreibung einer Funktion an, genauer alle Zeilen, die mit `%` beginnen, bis zur ersten Leerzeile oder der ersten Anweisung.

Die Beschreibung einer Funktion bei MATLAB ist sehr wichtig und sollte mindestens folgende Dinge beinhalten

- Kurzbeschreibung der Funktion
- Beschreibung aller Parameter und Rückgabewerte
- Beispiel für den Aufruf der Funktion

Funktionen, die nicht ausführlich und eindeutig und klar dokumentiert sind, sind völlig wertlos. Bei MATLAB ist das wichtiger als bei der Programmiersprache C, weil die Parameter und Rückgabewerte nur Namen aber keine Typinformationen besitzen. Insbesondere erkennt man nicht, ob ein Parameter ein Skalar oder ein Vektor oder eine Matrix sein muss.

K3_14

3.3 Beispiele für Funktionen - Kreisumfang

Schreibe eine Funktion, die den Umfang eines Kreises mit Radius r berechnet.

```
function [umf] = umfang( r )
%UMFANG : Kreisumfang berechnen
% umf = umfang( r ) , r : Radius
  umf = 2*pi*r;
end
```

```
function umf = umfang1( r )
  u = 2*pi*r;
end
```

Command Window

```
>> r = 5
r =
     5
>> u = umfang(r)
u =
   31.4159
>> help umfang
 umfang : Kreisumfang berechnen
  umf = umfang(r),r:Radius

>> u = umfang([ 2 3 4 ])
u =
   12.5664   18.8496   25.1327
>> u = umfang([1 2; 3 4])
```

Command Window

```
>> r = 5
r =
     5
>> u = umfang1(r)
Output argument "umf" (and maybe others)
not assigned during call to "umfang1".
```

Beachte : Funktionen sollten, wenn möglich immer so geschrieben werden, dass beliebige Arrays als Parameter verwendet werden können!

K3_15

3.3 Beispiele für Funktionen – Kreisfläche

Schreibe eine Funktion, die die Fläche eines Kreises berechnet.

```
function [ fl ] = flaeche( r )
%FLAECHE : Kreisfläche berechnen
% [ fl ] = flaeche( r ), r: Radius fl: Kreisfläche
  fl = pi*r*r;
end
```

Command Window

```
>> r = 5
r =
     5
>> fl=flaeche(r)
fl =
   78.5398
>> R = [2 3; 4 2]
R =
     2     3
     4     2
>> fl=flaeche(R)
fl =
   50.2655   37.6991
   50.2655   50.2655
>> fl=flaeche([2 3])
```


K3_16

3.3 Beispiele für Funktionen – Parameter

Wenn an eine Funktion Parameter übergeben werden, dann werden nur Kopien der Variablen (Parameter) an die Funktion übergeben (Call by Value). Die Funktion arbeitet nur mit den Kopien. Diese Tatsache hat eine Reihe von Konsequenzen.
Beispiel : Funktion `f1` ändert nur die Werte in der Kopie des Aufrufparameters.
Funktion `f2` ändert die Werte der Kopie und gibt die Kopie aber zurück.

```
function f1( x )
  x = 2*x
end
```

```
function y = f2( x )
  x = 2*x;
  y = x;
end
```

```
a = [ 1 2 ]
f1( a )
a
```

f1scr.m

```
>> f1scr
a =
     1     2
x =
     2     4
a =
     1     2
```

```
a = [ 1 2 ]
b = f2( a )
a
c = [ 3 4 ]
c = f2( c )
```

f2scr.m

```
>> f2scr
a =
     1     2
b =
     2     4
a =
     1     2
c =
     3     4
c =
     6     8
```

3.4 Subfunctions

Ein M-File kann mehrere Funktionen enthalten. Aber nur die Funktion, die mit dem Dateinamen übereinstimmt (Primary Function), kann von außerhalb aufgerufen werden. Die anderen Funktionen (Subfunctions) können nicht von außen aufgerufen werden. Subfunctions werden nur von der Primary Function oder anderen Subfunctions des gleichen M-Files aufgerufen.

Editor - C:\Matlab\kreisSubf.m

kreisSubf.m

```
1  function [umf, fl] = kreisSubf(r)
2    umf = sumfang(r);
3    fl  = sflaeche(r);
4  end
5
6  function [umf] = sumfang(r)
7    umf = 2*pi*r;
8  end
9
10 function fla = sflaeche(a)
11   fla = pi*a.*a;
12 end
```

Primary Function `kreisSubf`

Funktions- und Dateiname sind identisch!!
Diese Funktion kann im Command-Window aufgerufen werden.

Subfunction `sumfang`

Diese Funktion kann nicht im Command-Window aufgerufen werden.

Subfunction `sflaeche`

3.5 Hausaufgaben

Aufgabe 1

a) Schreiben Sie eine Funktion `kugel`, die das Volumen einer Kugel mit Radius r und deren Oberfläche berechnet und zurückgibt. Schreiben Sie die Funktion so, dass man beliebige Arrays übergeben kann.
Erstellen Sie ein Skript und rufen Sie die Funktion `kugel` auf. Übergeben Sie einmal einen Skalar, einen Zeilenvektor, einen Spaltenvektor und ein 2*3 Array an die Funktion.

b) Schreiben Sie eine Funktion `radius`, an die eine Kreisfläche übergeben wird und die den zugehörigen Radius berechnet und zurückgibt. Schreiben Sie die Funktion so, dass man beliebige Arrays übergeben kann.
Testen Sie Ihre Funktion mit einem geeigneten Skript und prüfen Sie, ob die berechneten Radien tatsächlich korrekt sind. Wann ist ein berechneter Radius korrekt und wann nicht? Versuchen Sie ein geeignetes Kriterium zu finden. Wie kann man einfach testen, ob alle Radien korrekt sind, wenn man z.B. ein 2*3 Array mit Flächen übergibt oder ein 200*300 Array.

3.5 Hausaufgaben

Aufgabe 2

Versuchen Sie die folgenden MATLAB-Anweisungen zu verstehen. Überlegen Sie sich was das Ergebnis der jeweils letzten Anweisung ist. Geben Sie dann die Befehle ein.

Geben Sie am Ende den Befehle `which sin` und `which sind` ein. Was muss man machen, damit man wieder auf die sin-Funktion zugreifen kann?

Command Window

```
>> x1 = sin(pi/6)
x1 =
    0.5000
>> sin = 1
sin =
     1
>> sin(2) = sin(1)
sin =
     1     1
>> x2 = sin(pi/4)
```

Command Window

```
>> x1 = sind(30)
x1 =
    0.5000
>> sind = 5
sind =
     5
>> sind(sind) = 3
```


3.5 Hausaufgaben

Aufgabe 3

Die nebenstehende Funktion `quadrGl` berechnet die beiden Nullstellen einer quadratischen Funktion. Schreiben Sie die Funktion so um, dass man beliebige Arrays übergeben kann, d.h. a, b und c dürfen auch n*m-Matrizen sein.

Es sollen zwei Arrays zurückgegeben werden, die jeweils die + (x1) und die – (x2) Lösungen enthalten.

Editor - C:\Matlab\quadrGl.m

quadrGl.m

```
1  function [x1,x2] = quadrGl(a,b,c)
2  %QUADRGL quad. Gleichung lösen
3  %  [x1,x2] = quadrGl(a,b,c)
4  %  a*x*x + b*x + c = 0
5  diskr = sqrt(b*b-4*a*c);
6  x1 = ( -b + diskr )/(2*a);
7  x2 = ( -b - diskr )/(2*a);
8  end
```

- Schreiben Sie ein Skript, das die Funktion `quadrGl` aufruft. Testen Sie ihr Programm mit Skalaren, Vektoren und einem 2*3-Array.
- Überprüfen Sie für jedes ihrer Beispiele, ob die Nullstellen tatsächlich Nullstellen, d.h. setzen Sie alle Nullstellen in die entsprechenden quadratischen Funktionen ein.
- Testen Sie Ihr Programm auch für sehr viele Gleichungen, z.B. 1000 000 oder 100 000 000. Verwenden Sie hierzu die Funktion `rand` um große Arrays zu erzeugen.
- Mit den MATLAB-Befehlen `tic` und `toc` können Sie ausgeben, wie lange eine Berechnung dauert.

```
tic
[x1, x2] = quadrGl(a,b,c);
toc
```

Ausgabe, wenn a, b und c jeweils 10000*10000 Matrizen sind – 100 000 000 Gleichungen!

```
Elapsed time is 0.869365 seconds.
```

3.5 Hausaufgaben

Aufgabe 4

Eine gedämpfte Schwingung kann in einfachen Fällen durch folgende DGL beschrieben werden (siehe Wikipedia).

$$\ddot{x}(t) + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0$$

Die Abklingkonstante δ bestimmt die Stärke der Dämpfung. ω_0 ist dabei die Kreisfrequenz des ungedämpften Systems. Durch die Dämpfung ändert sich die Kreisfrequenz zu ω_δ. Es gilt :

$$\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Die Lösung der DGL für das Anfangswertproblem $x(t=0)=x_0$ und $v(t=0)=v_0$ lautet:

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(\frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{\omega_\delta} \cdot \sin(\omega_\delta \cdot t) + x_0 \cdot \cos(\omega_\delta \cdot t) \right)$$

Schreiben Sie eine Funktion `gedschwingung`, die die Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung für eine gedämpfte Schwingung berechnet und zurückgibt. An die Funktion werden die beiden Intervallgrenzen für den Zeitraum, die Anzahl der Zeitpunkte, die Anfangsbedingungen, die Frequenz der ungedämpften Schwingung und die Abklingkonstante als Parameter übergeben. Die Funktion gibt vier Vektoren t, x, v und a zurück.

```
function [ t, x, v, a ] = gedschwingung( time, n, xv, w0, delta )
```

Schreiben Sie ein Skript `gedschwScr`, das die Funktion gedschwingung aufruft und anschließend x, v und a als Funktion der Zeit zeichnet.

```
[t,x,v,a] = gedschwingung( [0,30], 4000, [-2,0.0], 1.2, 0.2 );
plot(t,x, t,v, t,a)
```

Kapitel 4 – Kontrollstrukturen und Bedingungen

In MATLAB gibt es im wesentlichen die gleichen Kontrollstrukturen wie in der Programmiersprache C.

- Sequenz - Folge
- Verzweigung – Alternative – Auswahl
- Schleife – Iteration – Wiederholung
- Funktionen

Weiteres wichtiges Element bei der Anwendung von Kontrollstrukturen sind Bedingungen (Vergleiche) und deren Verknüpfung durch logische Operatoren (logische oder boolsche Ausdrücke).

Beachte :

- Bei MATLAB sind viele Operatoren und Funktionen auch für Arrays definiert.
- Es gibt spezielle Operatoren, um auf Zeilen oder Spalten oder Teilbereiche eines Arrays zuzugreifen.
- Aufgaben, die in der Programmiersprache C eine Schleife erfordern, können in MATLAB durch einen „einfachen Ausdruck“ programmiert werden.

Skalarprodukt : `x'*x` `y(1:3)'*x(4:6)`

Matrix-Vektormultiplikation : `y=A*x`

Ein logischer Ausdruck (z.B. ein Vergleich von zwei Werten des Typs double) erlaubt Entscheidungen (Ja/Nein). Das Ergebnis nach der Auswertung eines logischen Ausdrucks ist ein Wert vom Typ `logical`. Eine Variable dieses Datentyps besitzt entweder den Wert `true` oder `false` .

Vergleichsoperatoren bei MATLAB

`<`	kleiner	`<=`	kleiner gleich
`>`	größer	`>=`	größer gleich
`==`	gleich	`~=`	ungleich (in C `!=`)

Beispiele :

`a < b`	Ist a kleiner als b ?
`a == b`	Besitzen a und b den gleichen Wert?
`a ~= b`	Besitzen a und b unterschiedliche Werte?

Beachte :

Die Prüfung auf Gleichheit oder Ungleichheit macht bei Gleitkommazahlen häufig keinen Sinn (Rundungsfehler) und führt manchmal zu unerwarteten Ergebnissen oder Fehlern !

Command Window

```
>> a = 3
a =
     3
>> b = 5
b =
     5
>> x = a < b
x =
     1
>> whos
  Name  Size  Bytes  Class
  a      1x1      8  double
  b      1x1      8  double
  x      1x1      1  logical
>> x = false
x =
     0
>> x = 1
```

Die Variable x ist das Ergebnis eines logischen Ausdrucks (hier ein Vergleich).
Variable x ist daher vom Typ `logical`
`true` wird als 1 ausgegeben
`false` wird als 0 ausgegeben
Bei der direkten Zuweisung an eine Variable vom Typ `logical` muss `true` oder `false` verwendet werden.

Welchen Typ besitzt die Variable nach dieser Anweisung?

K4_05

4.1 Bedingungen

Beachte : Vergleichsoperatoren sind auch für Arrays definiert!

Beispiel :

A und B sind zwei 2*2-Matrizen.

Was bedeutet A < B ? Was ist das Ergebnis von A < B ?

Command Window

```
>> A = [ 1 2; 3 4]
A =
     1     2
     3     4
>> B = [ 1 3; 4 -1]
B =
     1     3
     4    -1
>> C = A < B
C =
     0     1
     1     0
>> whos C
 Name Size Bytes Class
 C     2x2     4 logical
```

Sind die Operanden bei einem Vergleich Arrays gleicher Größe, dann wird der Ausdruck elementweise ausgewertet. Das Ergebnis ist ein Array und es besitzt die gleiche Größe wie die Operanden. Die Elemente des Arrays sind vom Typ `logical`.

In der Programmiersprache C müsste man für diese Aufgabe zwei geschachtelte Schleifen programmieren.

K4_06

4.2 Logische Verknüpfungen

Zur Verknüpfung boolscher Werte existieren fünf logische Operatoren

&&	UND	&	UND
||	ODER	|	ODER
~	NICHT – Negation (in C !)		

Beispiele :

(a > b) && (b ~= 5)	a größer als b UND b ungleich 5
(0 < a) && (a < 1)	liegt a zwischen 0 UND 1, ohne die Grenzen
(0 <= a) && (a <= 1)	liegt a zwischen 0 UND 1, mit den Grenzen
(a < 0) || (a > 1)	a ist kleiner als 0 ODER größer als 1
~(a < 0)	NICHT a kleiner als 0

Beachte :

&& und || werden von links nach rechts ausgewertet und sind short-circuit
Die Operatoren & und | werten einen Ausdruck vollständig aus, d.h. es wird immer die linke und die rechte Seite ausgewertet.

Beispiele :

```
( a > 3) && ( 1 == starte())      ( 1 == starte()) && ( a > 3)
( a > 3) & ( 1 == starte())       ( 1 == starte()) & ( a > 3)
```


K4_07

4.3 Kontrollstrukturen

In MATLAB gibt es im Wesentlichen die gleichen Kontrollstrukturen wie in der Programmiersprache C. Die Syntax (Schreibweise) der Kontrollstrukturen in MATLAB unterscheidet sich aber von der Syntax in der Programmiersprache C. Die Semantik (Bedeutung) ist praktisch identisch.

4.3.1 Alternativen

`if-else`-Anweisung
bedingte Anweisung – einfaches `if`
verschachtelte `if-else`-Anweisung - Mehrfachauswahl
`switch`-Anweisung

4.3.2 Schleifen - Wiederholungen

`for`-Schleife
`while`-Schleife

4.3.3 Sprunganweisungen

`break`
`continue`
`return`

K4_08

4.3.1 Alternativen

```c
#include <stdio.h>
int main(void) {
  double z1, z2, z3, max;
  printf("Zahl 1 :");  scanf("%lf", &z1);
  printf("Zahl 2 :");  scanf("%lf", &z2);
  printf("Zahl 3 :");  scanf("%lf", &z3);
  if ( z1 > z2 )
  {
     if ( z1 > z3 )
        max = z1;
     else
        max = z3;
  }
  else
  {
     if ( z2 > z3 )
        max = z2;
     else
        max = z3;
  }
  printf("Maximum = %f\n", max);
  return 0;
}
```

Console

<terminated> alternative.exe [C/C++ Applicatio

```
Zahl 1 : 5
Zahl 2 : 3
Zahl 3 : 7
Maximum = 7.000000
```

K4_09

4.3.1 Alternativen – Funktion input

```
Command Window
>> help input
 input  Prompt for user input.
    RESULT = input(PROMPT) displays the PROMPT string on the screen, waits
    for input from the keyboard, evaluates any expressions in the input,
    and returns the value in RESULT. To evaluate expressions, input accesses
    variables in the current workspace. If you press the return key without
    entering anything, input returns an empty matrix.

    STR = input(PROMPT,'s') returns the entered text as a MATLAB string,
    without evaluating expressions.

    To create a prompt that spans several lines, use '\n' to indicate each
    new line. To include a backslash ('\') in the prompt, use '\\'.

    Example:

       reply = input('Do you want more? Y/N [Y]:','s');
       if isempty(reply)
          reply = 'Y';
       end

    See also keyboard.

    Reference page for input
```

```
Command Window
>> x=input('Zahl x : ')
Zahl x : 5
x =
     5
>> y = input('Zahl y : ')
Zahl y : 4*x
y =
    20
```

```
Command Window
>> z=input('Eingabe : ')
Eingabe : sin(pi/6)
z =
    0.5000
```


K4_10

4.3.1 Alternativen

Wie in C gibt es verschiedene Möglichkeiten Alternativen zu programmieren.

a) `if-else`-Anweisung

```
if logischerAusdruck
  Anweisungen-1
else
  Anweisungen-2
end
```

```
if a < 0
  b = -a;
else
  b = a;
end
c = sqrt(b);
```

```
if ( a < 0 )
  b = -a;
else
  b = a;
end
c = sqrt(b);
```

b) Bedingte Anweisung - Einfaches `if`

```
if logischerAusdruck
  Anweisungen
end
```

```
if a < 0
  a = 0;
end
b = a;
```

```
if ( a < 0 )
  a = 0;
end
b = a;
```

Die runden Klammern um die Bedingung sind optional. Der Anweisungsblock muss stets durch das Schlüsselwort `end` abgeschlossen werden.
Merke : Zu jedem `if` gehört genau ein `end` .

K4_11

4.3.1 Alternativen

c) Verschachtelte `if-else`-Anweisungen

```
if logischerAusdruck-1
   Anweisungen-1
else
   if logischerAusdruck-2
      Anweisungen-2
   else
      if logischerAusdruck-3
         Anweisungen-3
      else
         ...
      end
   end
end
```

Verschachtelung :
- Jedes `if` wird durch ein `end` abgeschlossen.
- Ohne saubere Formatierung wird es unübersichtlich und unverständlich!

d) Mehrfachauswahl

```
if logischerAusdruck-1
   Anweisungen-1
elseif logischerAusdruck-2
   Anweisungen-2
elseif logischerAusdruck-3
   Anweisungen-3
elseif
   ...
else
   ...
end
```

Ein `elseif` wird durch ein anderes `elseif`, ein `else` oder ein `end` abgeschlossen.

K4_12

4.3.1 Alternativen

e) Fallunterscheidung `switch - case`

```
switch Auswahlausdruck
   case Wert-1
        Anweisungen-1
   case Wert-2
        Anweisungen-2
   . . .
   otherwise
        Anweisungen-1
end
```

```
switch ( note )
   case 1
        disp('sehr gut')
   case 2
        disp('gut')
   otherwise
        disp('mehr üben')
end
```

```
switch ( tag )
  case 'Montag'
       disp('Arbeiten')
  case 'Dienstag'
       disp('Arbeiten')
  case 'Mittwoch'
       disp('Frei')
  case 'Donnerstag'
       disp('Arbeiten')
  case 'Freitag'
       disp('Arbeiten')
  otherwise
       disp('Wochenende')
end
```

Die `switch`-Anweisung wertet einen Ausdruck aus, der verschiedene diskrete Werte (nicht notwendig ganze Zahlen wie in der Programmiersprache C) annehmen kann. Im Gegensatz zu C entfällt die break-Anweisung. Der otherwise-Teil ist optional.

4.3.2 Schleifen

Beispiele für einfache Schleifen in der Programmiersprache C

for – Schleife

```
#include <stdio.h>
int main(void)
{
 int i,q;
 for (i=1; i<=15; i=i+1)
 {
   q = i*i;
   printf("i=%d Quadrat=%d\n",i,q);
 }
 return 0;
}
```

```
Console
<terminated> quadratfor.exe [C/C++ App
i=1 Quadrat=1
i=2 Quadrat=4
i=3 Quadrat=9
i=4 Quadrat=16
i=5 Quadrat=25
...
```

while - Schleife

```
#include <stdio.h>
int main(void)
{
 int i,q;
 i=1;
 while ( i <= 15 )
 {
   q = i*i;
   printf("i=%d ...
   i = i +1;
 }
 return 0;
}
```


4.3.2 Schleifen

Bei Schleifen unterscheidet man zwischen **Zählschleifen** (`for`-Schleife) und **Wiederholschleifen** (`while`-Schleifen). Im Gegensatz zu C gibt es bei MATLAB keine do-while-Schleife.

Zähl-Schleife :

```
for index = startwert : endwert
    Anweisungen
end
```

```
for ( index = startwert : endwert )
    Anweisungen
end
```

Wiederhol-Schleife :

```
while Bedingung
    Anweisungen
end
```

```
while ( Bedingung )
    Anweisungen
end
```

```
for index = startwert : inkrement : endwert
    Anweisungen
end
```

index : Zählvariable (kein Vektor!) - typischerweise eine ganze Zahl
bei ersten Durchlauf wird *index* auf den Startwert gesetzt

inkrement : Wert, um den die Zählvariable `index` nach einem Schleifendurchlauf erhöht wird , Defaultwert für *inkrement* ist 1

4.3.3 Sprunganweisungen

Ein Schleifendurchlauf kann mit Sprunganweisungen unterbrochen werden :

- **break**
  die innerste umgebende Schleife wird verlassen
- **continue**
  der aktuelle Schleifendurchlauf der innersten umgebenden Schleife wird beendet und es wird ein neuer Schleifendurchlauf geprüft und ggf. ausgeführt
- **return**
  Rücksprung aus einer Funktion zur aufrufenden Funktion
  der Rücksprung erfolgt auch über Schleifenebenen

```
while ( Bedingung-a )
   Anweisungen-1
   if ( Bedingung-b )
      break;
   end
   Anweisungen-2
end
```

```
while ( Bedingung-a )
   Anweisungen-1
   if ( Bedingung-b )
      continue;
   end
   Anweisungen-2
end
```


4.4 Hausaufgaben

Aufgabe 1

Welche Anweisungen sind korrekt, welche falsch? Welche Ausdrücke sind gut formatiert, welche schlecht?

```
if i == 1
  disp('i ist 1')
elseif i == 2
  disp('i ist 2')
else
  disp('i ist 3')
end
```

```
if i == 1
  disp('i ist 1')
else if i == 2
  disp('i ist 2')
else
  disp('i ist 3')
end
end
```

```
if i == 1
  disp('i ist 1')
else
  if i == 2
     disp('i ist 2')
  else
     disp('i ist 3')
  end
end
```

```
if i == 1
 disp('i ist 1')
else if i == 2
 disp('i ist 2')
else
 disp('i ist 3')
end
```

```
if i == 1
  disp('i ist 1')
else
  if i == 2
     disp('i ist 2')
  else
     disp('i ist 3')
  end
```

Aufgabe 2

Schreiben Sie das Skript `alternative.m` zur Berechnung des Maximums von drei Zahlen um. Es sollen keine verschachtelten `if-else`-Anweisungen verwendet werden sondern nur `if-elseif-else`-Anweisungen und logische Verknüpfungen.

Muss man bei den logischen Verknüpfungen & oder && verwenden oder ist es egal ? Was ist der genaue Unterschied?

Editor - C:\matlab\kap4\alternative.m

alternative.m

```
1   z1 = input('Zahl 1 : ');
2   z2 = input('Zahl 2 : ');
3   z3 = input('Zahl 3 : ');
4   if ( z1 > z2 )
5      if ( z1 > z3 )
6         max = z1;
7      else
8         max = z3;
9      end
10  else
11     if ( z2 > z3 )
12        max = z2;
13     else
14        max = z3;
15     end
16  end
17  fprintf('Maximum = %f\n', max);
```


a) Schreibe eine MATLAB-Funktion `wurzel.m` , die die Quadratwurzel einer positiven Zahl mit Hilfe des Heron-Verfahrens berechnet.

Heron-Verfahren (Iteration) : $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + x / x_n)$ $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{x}$

Für jeden positiven Startwert x_1 konvergiert x_n gegen die Quadratwurzel von x.

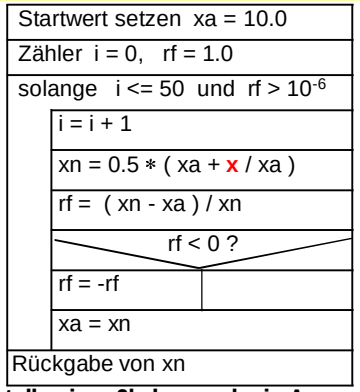
Beispiel :

x = 5.0 Startwert $x_1 = 10$

$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x / x_1) = 5.25$

$x_3 = \frac{1}{2} \cdot (x_2 + x / x_2) = \frac{1}{2} \cdot (5.25 + 5/5.25) = 3.101$

x_4 = 2. 356 737 272 644 183
x_5 = 2. 239 157 222 737 191
x_6 = 2. 236 070 108 532 850
x_7 = 2. 236 067 977 500 805
x_8 = 2. 236 067 977 499 790



b) Schreiben Sie die Funktion so, dass man anstelle eines Skalars auch ein Array übergeben kann. Testen Sie ihre beiden Funktionen mit einem geeigneten Skript – Skalar, Matrix, mehrdimensionale Arrays (30*40*20*50), kleine Zahlen.

Gegeben ist die C-Funktion `sortiere`, die die Elemente eines Vektors der Größe nach ordnet (Bubble-Sort-Algorithmus). Der Vektor x wird als Parameter übergeben. Die Anzahl der Elemente des Vektors wird im Parameter n übergeben. Schreiben Sie die C-Funktion in eine MATLAB-Funktion um. Der Ablauf der MATLAB-Funktion soll der C-Funktion entsprechen. Die MATLAB-Funktion besitzt als Aufrufparameter nur den Vektor x und gibt den sortierten Vektor zurück. Verwenden Sie nur Variablen vom Typ double.

Schreiben Sie ein Skript `sortScr`, das mit Hilfe der Funktion rand Vektoren erzeugt, die anschließend sortiert werden.

Vergleichen Sie die Rechenzeit, die die Funktion sortiere braucht, mit der Rechenzeit, die die MATLAB-Funktion sort braucht, für Vektoren mit sehr vielen Elementen.

```
void sortiere(double x[], int n)
{
 int i, sortiert;
 double hilf;
 while (1 == 1)
 {
  sortiert = 1;/*Annahme: x sortiert*/
  for (i=1; i<n; i++)
  {
    if ( x[i-1] > x[i] )
    {
      hilf=x[i];/*tausche x[i],x[i-1]*/
      x[i]=x[i-1];
      x[i-1]=hilf;
      sortiert = 0; /*nicht sortiert */
    }
  }
  if (sortiert == 1)
  {
     break;  /* Vektor ist sortiert */
  }
 }
}
```


Das Skript zur Bestimmung der Rechenzeit, könnte z.B. die folgende Ausgabe erzeugen. Die erste Tabelle zeigt die Rechenzeit der Funktion `sortiere` (Bubble-Sort-Algorithmus) und der MATLAB-Funktion `sort` für verschiedene Werte von n (n ist die Anzahl der Elemente des zu sortierenden Vektors). Die Länge wird jeweils verdoppelt.

Bei n=25600 ist die MATLAB-Funktion um den Faktor 5000 schneller.

Die zweite Tabelle zeigt die Rechenzeit der MATLAB-Funktion `sort` für große Werte von n.

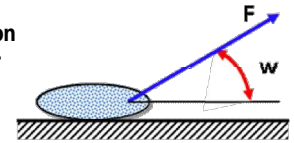
Command Window

```
>> sortScr
       n      sortiere       sort
     100     0.000571     0.000065
     200     0.000320     0.000042
     400     0.001270     0.000064
     800     0.003968     0.000069
    1600     0.016805     0.000450
    3200     0.071315     0.000165
    6400     0.309427     0.000335
   12800     1.311671     0.000708
   25600     5.334858     0.001003
Funktion sort
       n      Zeit in Sek
   10000     0.001983
  100000     0.005802
 1000000     0.048427
10000000     0.363769
100000000    4.884484
```

Aufgabe 5

Ein Sack Reis mit einer Masse von 40kg wird von einer Person mit der Kraft F unter dem Winkel w gezogen. Der Betrag der Kraft F ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$F(w) = \frac{m \cdot \mu}{\mu \cdot \sin(w) + \cos(w)}$$



wobei m die Masse und μ der Reibungskoeffizient ist. Dieser wird mit 0.35 angenommen.

Schreiben Sie ein MATLAB-Skript zur Ausgabe einer Tabelle (siehe rechts). In jeder Zeile der Tabelle wird ein Winkel und die zugehörige Kraft angegeben. Der Winkelbereich reicht von 5° bis 35° mit einer Schrittweite von einem Grad. Die Kraft wird über eine Funktion bestimmt. Am Ende der Tabelle wird der Winkel ausgegeben, bei dem die Kraft ein Minimum besitzt. Das Minimum wird aus den berechneten Tabellenwerten ermittelt. Bei mehrfachen Minima geben Sie den kleinsten Winkel aus. Die zugehörige Kraft wird ebenfalls ausgegeben. Danach geben Sie den Mittelwert aller Kräfte aus.

```
Winkel   Kraft
     5  13.636
     6  13.578
     . . .
    34  13.662
    35  13.727
Minimum: w = 19 Kraft= 13.214
Mittelwert der Kräfte 13.379
```

Beachten Sie: Die Tabelle besitzt eine Überschrift. Winkel werden ohne Nachkommastellen ausgegeben, Kräfte mit je drei Nachkommastellen. Die Werte für Winkel und Kraft sollen in der Tabelle rechtsbündig untereinander ausgegeben werden.

Die Kraft in Abhängigkeit von Reibungskoeffizient μ, Masse m und Winkel w wird in einer MATLAB-Funktion `kraft` berechnet und zurückgegeben. Erstellen Sie diese Funktion.

Aufgabe 6

Ändern Sie die Aufgabe 2 aus Kapitel 2 so ab, das beliebig viele Kräfte am Lager angreifen können. Der Anwender wird aufgefordert die Kräfte und die Richtungen einzugeben. Ist der Betrag der Kraft negativ wird die Eingabe beendet. Anschließend werden die Kräfte und die zugehörigen Richtungen zur Kontrolle ausgegeben.

Danach wird die Gesamtkraft berechnet. Geben Sie diese einmal in kartesischen Koordinaten und dann mit Betrag und Richtung aus. Für die Kräfte aus dem Beispiel von Kap2/Aufgabe2 sieht die Ausgabe wie rechts dargestellt aus .

Berücksichtigen Sie auch den Fall, dass die Gesamtkraft 0 ist und dass die Gesamtkraft in y-Richtung zeigt.

```
Kraft (Ende: -1): 400
Winkel in Grad  : -20
Kraft (Ende: -1): 500
Winkel in Grad  : 31
Kraft (Ende: -1): 700
Winkel in Grad  : 143
Kraft (Ende: -1): -1

Nr.      Kraft    Winkel
  1   400.0000    -20.00
  2   500.0000     31.00
  3   700.0000    143.00

Gesamtkraft     : ( 245.4158, 541.9815 )
Betrag der Kraft:   594.9562
Richtung in Grad:    65.638
```

Kapitel 5 – Datentypen

Der grundlegende Datentyp in MATLAB ist der Datentyp `double`.

Wenn es nicht explizit anders vereinbart wird, dann sind die Elemente eines Arrays vom Typ `double`.

Neben dem Datentyp `double` gibt es eine Reihe von weiteren Datentypen, die für spezielle Anwendungen gebraucht werden :

- Darstellung von Text/Strings `'Hallo'`
- logische Werte – `true` und `false`
- Variablen, die nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen
- Speicherplatzeffiziente Darstellung von Werten
- Datentypen für komplexe Datenstrukturen

Wichtige Unterschiede zur Programmiersprache C :

- Der Datentyp einer Variablen kann sich durch Zuweisungen ändern.
- Datentypen dürfen nicht ohne weiteres in einem Ausdruck gemischt werden
- Das Verhalten bei Overflow und Underflow ist völlig anders !
- Es gelten andere Regeln bei Typkonvertierung

Die Programmiersprache MATLAB definiert folgende Datentypen (Classes) :

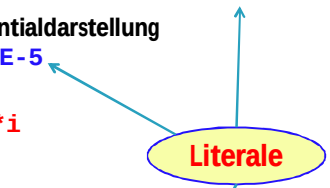
`double`			
`single`			
`int8`	`int16`	`int32`	`int64`
`uint8`	`uint16`	`uint32`	`uint64`
`logical`			
`char`			
`function_handle`	function handle array		
`cell`	cell array		
`struct`	structure array		
`string`	String (seit Matlab 2017a)		

Daneben gibt es noch spezielle Datentypen, die aber selten gebraucht werden.

Typ	Bytes	Wertebereich	Führende Stellen
`double`	8	$\pm 1.8*10^{308}$ $\pm 4.9*10^{-308}$	15 – 16
`char`	2	$0 \ldots 2^{16}-1$	Unicode
`logical`	1 Bit	`true` (`1`), `false` (`0`)	

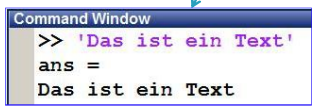
Zahlenformate

- ganze Zahlen in der Dezimaldarstellung mit oder ohne Vorzeichen
  `13` `-20` `+300`
- Gleit- oder Fließkommazahlen mit Dezimalpunkt
  `1.5` `-2.1` `3.0` `.26` `+.25` `3.1415`
- Gleit- oder Fließkommazahlen in der Exponentialdarstellung
  `2.1e+3` `.1e-5` `2e3` `0.2E-5`
- Komplexe Zahlen – imaginäre Einheit i oder j
  `3 + 4i` `3 + 4j` nicht `3 + 4*i`



Zeichen – Strings – Character-Arrays

- Character `'T'`
- Zeichenketten `'Das ist ein Text'`
  (in C : `"Das ist ein Text"`)
- Keine binäre Null am Ende



5.3 Mathematische Konstanten

Mathematische Konstanten :

`eps`	Floating-point relative accuracy – `2.2204e-016`
	`1 ~= 1+eps` ist false! `1 == (1+0.5*eps)` ist true !
`Inf`	Infinity z.B. `1/0`
`i`	Imaginary unit - `3.5i` , `1+5i`
`j`	Imaginary unit - `2.4+5j`
`NaN`	Not-a-Number z.B. `0/0`
`pi`	Ratio of circle's circumference to its diameter - `3.1415...`
`realmax`	Largest positive floating-point number - `1.7977e+308`
`realmin`	Smallest positive normalized floating-point number `2.2251e-308`

Beachte : Konstanten können auch überschrieben werden, z.B.

```
pi = 3.17
```


5.4 Komplexe Zahlen

MATLAB kann mit komplexen Zahlen umgehen. Sehr viele Funktionen arbeiten auch mit komplexen Zahlen.

Für die imaginäre Einheit werden die Symbole i oder j verwendet.

Um eine Verwechslung mit der imaginären Einheit zu vermeiden, sollte man bei MATLAB die Namen i und j nicht als Variablennamen verwenden.

```
>> x = sqrt(-2)
x =
    0 + 1.4142i
>> whos x
 Name Size Bytes   Class Attributes
 x     1x1    16  double    complex
>> x = 3 + 5i
x =
        3 + 5.0000i
>> y = x*6j
y =
       -30 + 18.0000i
>> x*y
ans =
 -1.8000e+002 -9.6000e+001i
```

Funktionen für komplexe Zahlen :

```
imag
conj
angle
abs
real
isreal
```

Was ist der Unterschied zwischen `x = 5i` und `x = 5*i` ?

Kapitel 6 Anwendungen aus der Analysis

Polynom n-ten Grades :

$$y(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$ Mathematik

$$y(x) = a_1 \cdot x^n + a_2 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x^2 + a_n \cdot x + a_{n+1}$$ MATLAB

Beispiel : $y(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 + 7$

$a_1 = 1 \quad a_2 = -4 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 7$

Ein Polynom n-ten Grades wird durch n+1 Koeffizienten a_i eindeutig festgelegt.

Die Werte der Koeffizienten eines Polynoms n-ten Grades werden in einem Vektor der Länge n+1 gespeichert (Zeilen- oder Spaltenvektor). Das erste Element des Vektors ist der Koeffizient des Terms x^n. Das letzte Element des Vektors ist der konstante Term des Polynoms.

```
a = [1,-4,0,7]        a = [1;-4;0;7]
```

Beim Arbeiten mit einem Polynom wird der Vektor mit den Werten der Koeffizienten als Parameter an MATLAB-Funktionen übergeben. Mit Hilfe des Vektors kann der Funktionswert des Polynoms an einer beliebigen Stelle x berechnet werden, ebenso Ableitungen, das Integral oder die Nullstellen.

Funktionswert an einer vorgegebenen Stelle x berechnen:

$$y(x) = a_1 \cdot x^n + a_2 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x^2 + a_n \cdot x + a_{n+1}$$

$y(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 + 7 \qquad a_1 = 1 \quad a_2 = -4 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 7$

```
function y = pvalue(




end
```

```
> a = [1,-4,0,7];
> x = 2.3;
> y = pvalue(a, x);
```

```
> a1 = [1; -4; 0; 7];
> x = [1.2 2.4 3.7];
> y = pvalue(a1, x);
```


Die Funktion `pvalue` muss nicht selbst programmiert werden (ein Polynom kann wesentlich besser und effektiver ausgewertet werden als in pvalue gezeigt – Hornerschema). Für die Auswertung eines Polynoms und für viele andere Aufgaben gibt es bereits fertige Funktionen – diese Funktionen sollte man verwenden!

Aufgabe : Funktionswerte bestimmen

Die MATLAB-Funktion `polyval` berechnet die Funktionswerte eines Polynoms an der „Stelle x“, wobei x ein Skalar oder ein beliebiges Array sein kann.

```
> a = [1,-4,0,7];
> x = 4;
> y = polyval(a, x);
```

```
> a = [1; -4; 0; 7];
> x = [-2:0.1:5];
> y = polyval(a, x);
```

polyvalScr.m

```
polyval Evaluate polynomial.
 Y = polyval(P,X) returns the value of a polynomial P evaluated
 at X. P is a vector of length N+1 whose elements are the
 coefficients of the polynomial in descending powers.
    Y = P(1)*X^N + P(2)*X^(N-1) + ... + P(N)*X + P(N+1)
 If X is a matrix or vector, the polynomial is evaluated at all
 points in X.
```

K6_5

6.1.2 Nullstellen

Aufgabe : Nullstellen eines Polynoms bestimmen

Die Funktion `roots` berechnet die Nullstellen eines Polynoms und gibt diese in einem Spaltenvektor zurück.

```
roots  Find polynomial roots.
 roots(C) computes the roots of the polynomial whose coefficients
 are the elements of the vector C. If C has N+1 components,
 the polynomial is C(1)*X^N + ... + C(N)*X + C(N+1).
```

Bemerkung :

- Ein Polynom n-ten Grades besitzt genau n Nullstellen.
- Die Nullstellen eines Polynoms können reell oder komplex sein.
- Die Nullstellen für Polynome 5-ten und höheren Grades müssen meist numerisch bestimmt werden. Es gibt kein analytisches Verfahren.

```
> a = [ 1 -4 0 7 ];
> nst = roots(a)
   nst = 3.3914
         1.7729
         -1.1642
> polyval(a,nst)
  ans = 1.0e-014 *
        0.1776
        -0.1776
        0.5329
```

Verifikation, dass tatsächlich Nullstellen vorliegen – o.k.

rootsScr.m

K6_6

6.1.3 Ableitung

Aufgabe : Die Ableitung eines Polynoms bestimmen

Die Funktion `polyder` (der – derivative - Ableitung) berechnet die Ableitung eines Polynoms. Das Ergebnis ist ein Zeilenvektor, der die Koeffizienten des abgeleiteten Polynoms enthält. Die Ableitung wird analytisch berechnet.

Beispiel :

Berechne die Ableitung des Polynoms :

$$y(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 + 7$$

Das Ergebnis ist das Polynom :

$$y'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x$$

Anwendung :

Bestimme die lokalen Extrema eines Polynoms.

- Berechne die erste Ableitung
- Bestimme die Nullstellen der Ableitung
- Berechne die Funktionswerte an den Nullstellen der ersten Ableitung

Skizzieren Sie das Polynom! Verwenden Sie `nst` und `extrema`.

```
> a = [ 1 -4 0 7 ];
> dy = polyder(a)
  dy =
     3    -8     0
> extrema = roots(dy)
  extrema =     0
            2.6667
> polyval(a,extrema)
 ans = 7.0000
      -2.4815
```

polyderScr.m

K6_7

6.1.4 Polynom integrieren

```
>> help polyint
 polyint Integrate polynomial analytically.
   polyint(P,K) returns a polynomial representing the
   integral of polynomial P, using a scalar constant of
   integration K.

   polyint(P) assumes a constant of integration K=0.

   Class support for inputs p, k:
       float: double, single

   See also polyder, polyval, polyvalm, polyfit.

   Reference page in Help browser
       doc polyint
```

Beachte :

Die Funktion `polyint` integriert ein Polynom analytisch. Das ist immer möglich, weil die Stammfunktion eines Polynoms wieder ein Polynom ist.
`polyint` gibt die Koeffizienten der Stammfunktion als Vektor zurück.

K6_8

6.1.4 Integration

Aufgabe :

Berechne den Wert des bestimmten Integrals unter Verwendung der Funktion `polyint`.

$$\int_2^4 y(x) \cdot dx = \int_2^4 (x^3 - 4 \cdot x^2 + 7) \cdot dx$$

Aufgabe :

Gegeben sind eine Reihe von Funktionen, die als M-Files definiert sind :
`sin`, `cos`, `exp` und die selbst geschriebenen Funktionen `xsin`, `gauss` und `poly`

```
function y=xsin(x)
 y = x.*sin(x);
end
```

```
function y=gauss(x)
 y = exp(-0.2*x.*x);
end
```

```
function y=poly(x)
 a = [1,-4,0,7];
 y = polyval(a,x);
end
```

Diese und weitere Funktionen, die die gleiche Struktur haben, nämlich `y=f(x)`, sollen mit einer Funktion `plotFktn` im Intervall [-5, +5] gezeichnet werden. Als Parameter werden die Funktion und die Anzahl der Punkte `n` übergeben. Der Kopf der Funktion `plotFktn` sieht also wie folgt aus :

```
function [] = plotFktn( fun, n )
```

Probleme :

Wie kann man eine Funktion, die in einem M-File definiert worden ist, als Parameter an eine andere Funktion übergeben?

Wie können Funktionswerte einer Funktion, die als Parameter übergeben worden ist, berechnet werden? Wie verwendet man `fun` im Innern der Funktion `plotFktn` um Funktionswerte von `fun` zu berechnen ?

Antwort : verwende ein Function-Handle

Function Handle : *handle (engl.) : Henkel oder Griff*

Ein function handle ist ein eigener Datentyp, der einen Verweis (Funktionszeiger) auf eine Funktion speichert. In einer Variablen vom Typ `function_handle` wird gespeichert, um welche Funktion es sich konkret handelt. Ein function handle wird häufig an eine andere Funktionen übergeben, damit diese die Funktion, die durch das function handle festgelegt wird, aufrufen kann.

```
> hd1 = @xsin
> hd2 = @exp
> plotFktn(hd1,100)
> plotFktn(hd2,200)
> plotFktn(@gauss,300)
```

Zwei Variablen vom Typ `function_handle` erzeugen und mit Werten belegen

An die `plotFktn` wird jeweils ein function handle als Parameter übergeben. `plotFktn` kann die entsprechende Funktion aufrufen, Funktionswerte an geeigneten Stellen bestimmen und dann die Funktion zeichnen.

```
> help function_handle
 FUNHANDLE = @FUNCTION_NAME returns a handle to the named function,
 FUNCTION_NAME. A function handle is a MATLAB value that provides a
 means of calling a function indirectly. You can pass function handles
 in calls to other functions (often called function functions). You
 can also store function handles in data structures for later use (for
 example, as Handle Graphics callbacks). A function handle is one of
 the standard MATLAB data types. Its class is 'function_handle'.
```



```
function plotFktn( fun, n )



end
```

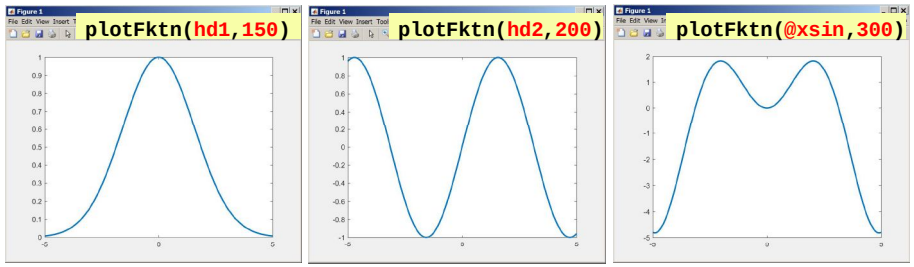
plotFktn.m

```
> hd1 = @gauss
> hd2 = @sin
> plotFktn(hd1,150)
> plotFktn(hd2,200)
> plotFktn(@xsin,300)
```

handleScr.m

```
function y=xsin(x)
 y = x.*sin(x);
end
```

xsin.m



Frage :

Wie kann man einfach sichtbar machen, dass der Aufruf `y=fun(x)` tatsächlich die übergebene Funktion aufruft?

Aufgabe :

Berechne den Wert eines bestimmten Integrals bei vorgegebenen Integranden.

$$\int_2^4 y(x)\cdot dx = \int_2^4 (x^3 - 4\cdot x^2 + 7)\cdot dx$$

$$\int_2^4 y(x)\cdot dx = \int_2^4 e^{-x^2}\cdot dx$$

$$\int_0^4 y(x)\cdot dx = \int_0^4 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Das linke Integral kann analytisch berechnet werden, da man eine Stammfunktion aus elementaren Funktionen angeben kann.

$$\frac{1}{4}\cdot x^4 - \frac{4}{3}\cdot x^3 + 7\cdot x + c$$

Die Funktion `polyint` berechnet ein Integral analytisch – das Ergebnis ist wieder ein Polynom. Die Funktion `polyint` kann aber nur Polynome integrieren.

Das beiden anderen Integrale können nicht analytisch berechnet werden. Die Werte dieser Integrale müssen numerisch bestimmt werden. Hierzu gibt es verschiedene Verfahren, z.B. das Trapezverfahren oder das Simpsonverfahren.

Wichtige Forderung an ein Verfahren, die das Integral einer Funktion berechnet :

An das Verfahren wird neben den Integrationsgrenzen auch der Integrand als Parameter (d.h. eine MATLAB-Funktion) übergeben. Das Verfahren kann dann Integrale von beliebigen Funktionen berechnen.

```
> help integral
 integral  Numerically evaluate integral.
   Q = integral(FUN,A,B) approximates the integral of function
   FUN from A to B using global adaptive quadrature and default
   error tolerances.
   FUN must be a function handle. A and B can be -Inf or Inf.
   If both are finite, they can be complex. If at least one is
   complex, integral approximates the path integral from A to B
   over a straight line path.
   For scalar-valued problems the function Y = FUN(X) must
   accept a vector argument X and return a vector result Y, the
   integrand function evaluated at each element of X. ...
```


$$\int_2^4 y(x)\cdot dx = \int_2^4 (x^3 - 4\cdot x^2 + 7)\cdot dx$$

```
function y = poly( x )
  a = [ 1,-4,0,7 ];
  y = polyval(a, x);
end
```

poly.m

$$\int_2^4 y(x)\cdot dx = \int_2^4 e^{-x^2}\cdot dx$$

```
function y = gauss( x )
   y = exp( -x.*x );
end
```

gauss.m

```
> z = integral( @poly, 2, 4 );
```

```
> z = integral( @gauss, 2, 4 );
```

Der Aufruf der Funktionen `poly` und `gauss` durch die Funktion `integral` ist nicht direkt sichtbar! Beide Funktionen müssen aber in Form von M-Files vorhanden sein. Beide Funktionen müssen die Übergabe von Arrays unterstützen.

```
function z = integral( fun,a,b )
  . . .          fun(x)
                 ---->
  . . .          <----
                   y
end
```

integral.m

```
function y = fun( x )
  . . .
  . . .
end
```

m-File : fun.m

Oft ist es umständlich für jede Funktion, die man als Parameter übergeben muss, ein eigenes M-File zu schreiben besonders, wenn es sich um einfache Funktionen handelt. In diesem Fall kann man „anonymous Functions“ verwenden.

Beispiele :

```
function y=xsin(x)
 y = x.*sin(x);
end
```

```
function y=gauss(x)
 y = exp(-0.2*x.*x);
end
```

```
function y=poly(x)
 y = x.*x+.2*x+3.1;
end
```

Wie wird die Funktion `integral` aufgerufen, wenn man anonymous Function-Handles oder temporäre Function-Handles verwendet ?

Welche Werte ergeben sich bei folgenden Aufrufen?

```
a = integral(@(x) 2*x,1,10)   b = integral(@(x) 3*x.*x,1,10)
```


What Are Anonymous Functions?

An **anonymous function** is a function that is **not stored in a program file**, but is **associated with a variable whose data type is function_handle**. Anonymous functions can accept inputs and return outputs, just as standard functions do. However, they can contain only a single executable statement. For example, create a handle to an anonymous function that finds the square of a number:

```
sqr = @(x) x.^2;
```

Variable sqr is a function handle. The @ operator creates the handle, and the parentheses () immediately after the @ operator include the function input arguments. This anonymous function accepts a single input x, and implicitly returns a single output, an array the same size as x that contains the squared values. Find the square of a particular value (5) by passing the value to the function handle, just as you would pass an input argument to a standard function.

```
a = sqr(5)
a =
 25
```

Many MATLAB functions accept function handles as inputs so that you can evaluate functions over a range of values. You can create handles either for anonymous functions or for functions in program files. The benefit of using anonymous functions is that you do not have to edit and maintain a file for a function that requires only a brief definition. For example, find the integral of the sqr function from 0 to 1 by passing the function handle to the integral function:

```
q = integral(sqr,0,1);
```

You do not need to create a variable in the workspace to store an anonymous function. Instead, you can create a **temporary function handle** within an expression, such as this call to the integral function:

```
q = integral(@(x) x.^2,0,1);
```

Aufgabe :

Berechne das Integral für verschiedene Werte von a.

$$\int_2^4 y(x)\cdot dx = \int_2^4 e^{-a\cdot x^2}\cdot dx$$

```
function y = gauss( x )
   y = exp( -x.*x );
end
```

```
function y = gneu( x ,a)
   y = exp( -a*x.*x );
end
```

```
> z = integral( @gauss, 2, 4 );
```

```
> z = integral( @gneu, 2, 4 );
```

Man kann in der Funktion `gauss` einen weiteren Parameter hinzufügen – siehe Funktion `gneu`. Diese Lösungsvariante funktioniert aber nicht, da die Funktion `integral` ein Function Handle einer Funktion der Form `y = fun(x)` erwartet. Die Koeffizienten des Polynoms können daher nicht (so einfach) als Parameter übergeben werden.

Eine Lösung für dieses und eine Reihe ähnlicher Probleme bieten globale Variablen. Eine globale Variable kann von mehreren Funktionen und im Workspace verwendet werden. Alle Funktionen und auch der Workspace dürfen die globale Variable verändern. Jede Veränderung des Wertes ist für die anderen Funktionen sichtbar. Eine globale Variable wird nur einmal im Speicher gehalten.

`global` Define global variable.

`global X Y Z` defines X, Y, and Z as global in scope.

Ordinarily, each MATLAB function, defined by an M-file, has its own local variables, which are separate from those of other functions, and from those of the base workspace. However, if several functions, and possibly the base workspace, all declare a particular name as global, then they all share a single copy of that variable.

Any assignment to that variable, in any function, is available to all the other functions declaring it global.

If the global variable doesn't exist the first time you issue the global statement, it will be initialized to the empty matrix.

Integration der Gauss-Funktion für beliebige Werte des Parameters a.

```
function y = gaussGl( x )
  global a;
  y = exp( -a*x.*x );
end
```

M-File der Funktion `gaussGl`
Diese Funktion definiert die Variable a als globale Variable. Der Wert von a wird in der Funktion nur gelesen aber nicht gesetzt.

`integralScr.m`

```
> global a;
> a = 0.2;
> z1 = integral(@gaussGl,2,4)
 z1 =
   0.3854
> a = 0.4;
> z2 = integral(@gaussGl,2,4)
 z2 =
   0.1027
```

`workspace`

Im Workspace wird die Variable a ebenfalls als globale Variable definiert, danach erfolgt eine Wertzuweisung. Später wird der Wert von a geändert.

Die Variable a muss zweimal als globale Variable definiert werden, in der Funktion `gaussGl` und im Workspace oder im aufrufenden Skript (siehe Skript `integralScr.m`). Der Wert von a wird im Workspace gesetzt und verändert, in `gaussGl` nur gelesen und an die Funktion `exp` übergeben.

Aufgabe 1

Schreiben Sie in ein Skript `analysis.m` , das die Anweisungen zur Lösung der folgenden Aufgaben enthält

1. Stellen Sie die Funktion $y(x) = x^3 - 4\cdot x^2 + 7$ sowie deren erste und zweite Ableitung graphisch dar.
2. Geben Sie eine Wertetabelle für das x-Intervall [0, 3] aus, Schrittweite 0.1.
3. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion und die Lage der Extrema.
4. Geben Sie die Koeffizienten der Stammfunktion aus.
5. Berechnen Sie das Integral der Funktion zwischen den Grenzen 1 und 3. Lösen Sie die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten :
   - mit Hilfe der Funktion `polyint`
   - mit Hilfe der Funktion `integral`.

Aufgabe 2

Schreiben Sie ein Skript, das eine Wertetabelle für das Integral

$$z = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} dx$$

im Intervall `[0,2*pi]` ausgibt. Der Abstand der y-Werte soll jeweils 10° betragen. Rufen Sie die Funktion `integral` auf 3 verschiedene Arten auf :

- **Ein Function-Handle eines geeigneten M-Files übergeben**
- **Anonymous Function beim Aufruf definieren**
- **Variable vom Typ Function-Handle beim Aufruf verwenden**

Command Window

Winkel	Bogenmaß	Integral
0	0.0000	0.00000
10	0.1745	0.17424
20	0.3491	0.34671
30	0.5236	0.51569
40	0.6981	0.67950
50	0.8727	0.83658
...		
330	5.7596	1.44073
340	5.9341	1.42812
350	6.1087	1.42062
360	6.2832	1.41815

Warum gilt für kleine Werte von y ?

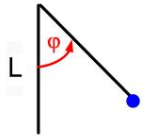
$$z = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} dx \approx y$$

Hierbei ist y ein kleiner Winkel im Bogenmaß.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Schwingungsdauer eines Pendels mit Hilfe einer Funktion `schwingungsdauer`. An diese Funktion werden die Länge des Pendels [in Metern] und die Anfangsauslenkung [in Grad] übergeben. Die Funktion gibt die Schwingungsdauer in Sekunden zurück.

Die Schwingungsdauer ist durch folgende Formel gegeben :



$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

Anfangsauslenkung φ_0

$$k = \sin\frac{\varphi_0}{2} \qquad k\sin(\psi) = \sin(\varphi/2)$$

Wie lautet der Integrand f(x)? Testen Sie ihr Programm! Für kleine Werte von k (d.h. für kleine Anfangsauslenkungen) ist die Periodendauer näherungsweise `2*π` Sekunden, wenn für die Länge `L = 9.81m` gewählt wird. Beweisen Sie das!

Berechnen Sie die Schwingungsdauer für eine Anfangsauslenkung von `30°`.

```
T = schwingungsdauer(9.81, 30)     (Ergebnis: T = 6.39257)
```

Geben Sie danach eine Tabelle mit den Werten der Schwingungsdauer für Anfangsauslenkungen von `0°` bis `180°` aus, Schrittweite `10°`.

Kapitel 7 - Lineare Algebra

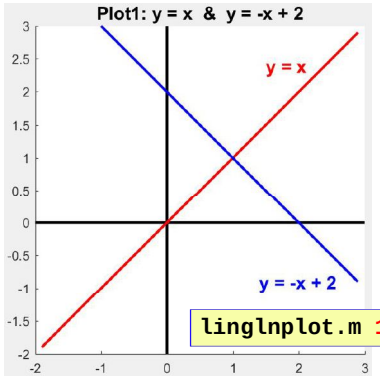
Lineare Gleichungssysteme :

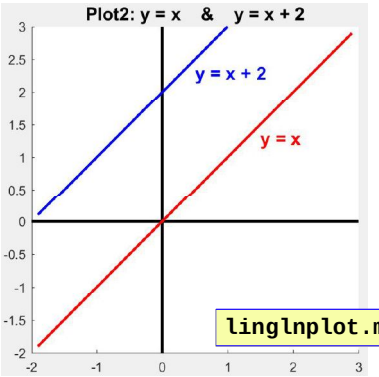
Beispiel 1 : Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y

$$\begin{aligned} 1:&\ -x+y=0 \\ 2:&\ x+y=2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1:&\ -x+y=0 \\ 2:&\ -2x+2y=4 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme löst man meist mit Hilfe eines Eliminationsverfahrens. Jede dieser Gleichungen stellt eine Geradengleichung dar. Die Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ist somit der Schnittpunkt von zwei Geraden.





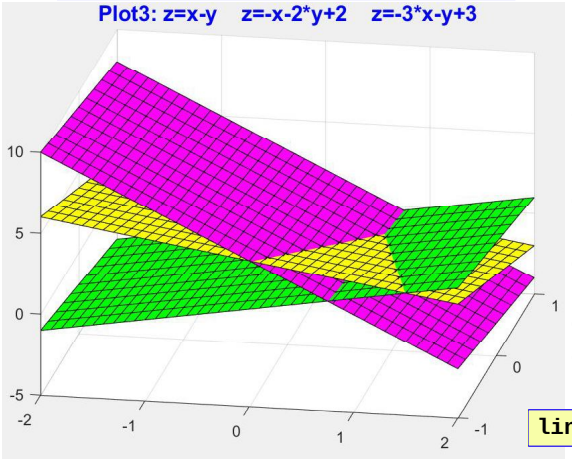
Beispiel 2 : Drei Gleichungen mit drei Unbekannten x, y und z.

$$\begin{aligned} -x+y+z&=0 \\ x+2y+z&=2 \\ 3x+y+z&=3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jede der drei Gleichungen beschreibt eine Ebene im Raum (z als Funktion von x und y).

z = x – y (Gl. 1)
z = -x -2y +2 (Gl. 2)
z = -3x-y +3 (Gl. 3)

Die Lösung des Gleichungssystems ist somit der Schnittpunkt von drei Ebenen im Raum. Normalerweise gibt es genau einen Schnittpunkt der drei Ebenen, aber es können auch Spezialfälle eintreten (Ebenen liegen parallel zueinander oder Ebenen fallen zusammen).



linglnplot.m 3

Beispiel 3: Überbestimmte Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 1:&\ -x+y=0 \\ 2:&\ x+y=2 \\ 3:&\ -0.5x+y=0.5 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

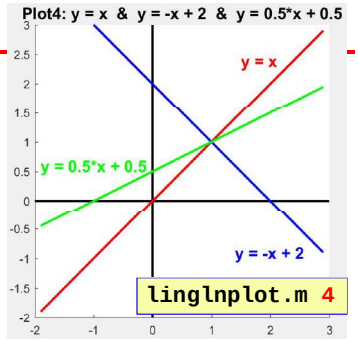
Diese 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten besitzen eine exakte Lösung, nämlich x = y = 1 . Dies ist aber ein Sonderfall.

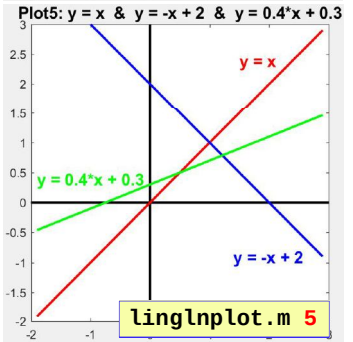
$$\begin{aligned} 1:&\ -x+y=0 \\ 2:&\ x+y=2 \\ 3:&\ -0.4x+y=0.3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -0.4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

Diese 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten besitzen keine (exakte) Lösung . Das ist der Normalfall.

Beide Gleichungssysteme haben die Struktur :

A*x = b A ist eine nicht-quadratische Matrix





Allgemeine Problemstellungen :

1) A * x = b „ n Gleichungen mit n Unbekannten “

A und b sind gegeben, x ist gesucht

A ist eine n * n - Matrix (d.h. A ist quadratisch)

x und b sind Spaltenvektoren mit jeweils n Zeilen

Wichtige mathematische Größen für quadratische Matrizen :

Determinante - Inverse Matrix - Eigenwerte und Eigenvektoren - Rang

2) A * x = b „ m Gleichungen mit n Unbekannten “

A und b sind gegeben, x ist gesucht

m > n : Gleichungssystem ist überbestimmt

m < n : Gleichungssystem ist unterbestimmt

A ist eine m * n - Matrix (d.h. A ist nicht quadratisch)

x ist ein Spaltenvektor mit n Zeilen

b ist ein Spaltenvektor mit m Zeilen

A sei eine n*n-Matrix

Satz : Ist die Determinante der Matrix A ungleich 0, dann besitzt die Gleichung $A * x = b$ für jedes vorgegebene b eine eindeutige Lösung x .

Satz : Ist die Determinante der Matrix A ungleich 0, dann existiert die inverse Matrix von A , d.h. es gibt eine Matrix $B = A^{-1}$ mit der Eigenschaft

$A^{-1} * A = A * A^{-1} = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

$B * A = A * B = E$

Wichtige MATLAB-Funktionen für quadratische Matrizen :

`d = det(A)` : berechnet die Determinante der Matrix A

`B = inv(A)` : berechnet die inverse Matrix von A

Lösung des Gleichungssystems ?

$A * x = b$


```
disp('Gleichungssystem: A*x = b')
A = [-1 1; 1 1]
b = [2; 5]

disp('Inverse von A berechnen')
IA = inv(A)

disp('Gleichungssystem lösen')
x = IA*b
x = inv(A)*b

disp('Probe: A*x = b')
b1 = A*x

disp('Probe: ist IA Inverse?')
E1 = A*IA
E2 = IA*A

disp('Determinante von A und IA')
D1 = det(A)
D2 = det(IA)

D3 = det(A)*det(IA)
```

lingln1.m

```
A = -1     1
     1     1
b =  2
     5
Inverse von A berechnen
IA = -0.500...   0.500...
      0.500...   0.500...
Gleichungssystem lösen
x = 1.500
    3.500
Probe: A*x = b
b1 = 2
     5
Probe: ist IA Inverse?
E1  = 1   0
      0   1
E2  = 1   0
      0   1
Determinante von A und IA
D1 = -2
D2 = -0.5000...
D3 = 1
```



```
disp('Gleichungssystem A*x = b')
A = [-1 1; -2 2]
b = [0; 4]

disp('Determinante von A')
d = det(A)

disp('Inverse von A berechnen')
IA = inv(A)

disp('Gleichungssystem lösen')
x = IA*b
```

lingln2.m

```
A = -1     1
    -2     2
b =  0
     4
Determinante von A
d = 0
Inverse von A berechnen
Warning: Matrix is singular
to working precision.
> In lingln2 at 10
  In run at 57
IA =
   Inf   Inf
   Inf   Inf
Gleichungssystem lösen
x =
   NaN
   NaN
...
```

NaN Not a Number

Ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe der inversen Matrix zu lösen ist zwar sehr einfach zu programmieren und funktioniert auch meistens für n Gleichungen mit n Unbekannten. Trotzdem wird dieses Verfahren nur sehr selten angewendet, da es eine Reihe von Problemen gibt :

- Die Berechnung der inversen Matrix ist für großes n sehr aufwendig. Es gibt eine Reihe von Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen, die wesentlich effektiver (weniger Rechenzeit, weniger Speicherplatz) arbeiten.
- Ist die Determinante einer Matrix 0, dann existiert gar keine inverse Matrix. Das Gleichungssystems kann in diesem Fall Lösungen besitzen oder auch nicht.
- Man möchte auch Gleichungssysteme der Art „ m Gleichungen mit n Unbekannten " lösen – überbestimmte (m > n) und unterbestimmte (m < n) Gleichungssysteme. In diesem Fall gibt es gar keine inverse Matrix.

Um diese Probleme ganz allgemein und effektiv zu lösen hat man bei MATLAB die sogenannte Linksdivision eingeführt :

- die Funktion `mldivide`
- den Operator `\` (Backslash)

Der Operator ist nur eine Kurzschreibweise für den Funktionsaufruf.

Aufgabe :

A sei eine m*n-Matrix und b ein Spaltenvektor mit m Zeilen. Gesucht ist ein Vektor x mit n Zeilen, der folgende Gleichung löst : `A*x = b`

Lösung :

Die MATLAB-Funktion `mldivide` berechnet die Lösung der obigen Aufgabe.

```
x = mldivide(A, b)
```

Um den Funktionsaufruf kompakter zu schreiben, wurde ein neuer Operator eingeführt, nämlich die Linksdivision – Operatorsymbol `\`

```
x = A \ b
```

Beachte : `x = mldivide(A, b)` und `x = A\ b` sind vollkommen identisch!

Je nach dem, welche Eigenschaften die Matrix A besitzt, wendet MATLAB im Hintergrund unterschiedliche Verfahren an, um das Gleichungssystem `A*x = b` möglichst effektiv zu lösen. Die Details sind in der MATLAB-Dokumentation beschrieben (siehe `mldivide` algorithm).

Frage : Welche Lösung berechnet MATLAB eigentlich ?

Manchmal gibt es ja gar keine Lösung ! MATLAB kann aber trotzdem eine Lösung zurückgeben!

`A*x = b : x = A\ b x = mldivide(A, b)`

Welche Lösung berechnet MATLAB ?

- `m = n` : MATLAB sucht eine exakte Lösung
  MATLAB gibt eine Warnung aus , wenn die Lösung „problematisch" ist, z.B. wenn die Determinante der Matrix A fast 0 ist – siehe Beispiel
- `m > n` : MATLAB sucht eine least-square solution. Gibt es eine exakte Lösung, dann wird diese zurückgegeben. Gibt es keine exakte Lösung, dann wird eine Lösung x des Gleichungssystems `A*x = b'` zurückgegeben, so dass die Differenz `b'- b` „so klein wie möglich" wird. D.h. man sucht ein `b'` in der Nähe von b, für das die Gleichung gelöst werden kann und gibt diese Lösung zurück.
- `m < n` : MATLAB sucht eine Lösung, bei der höchstens m Komponenten von 0 verschieden sind.

Bemerkung :

Ist `A` eine `n*n`-Matrix und `det(A)!=0` , dann ist die Matrix `A\` „identisch mit der inversen Matrix" von A. Es gilt : $A\backslash A = E = A^{-1} * A$.

MATLAB berechnet aber die Inverse der Matrix A bei der Lösung von Gleichungssystemen gar nicht sondern löst das Gleichungssystem wesentlich effektiver.

`A*x = b x = A\ b` Zwei Beispiele mit problematischen Lösungen

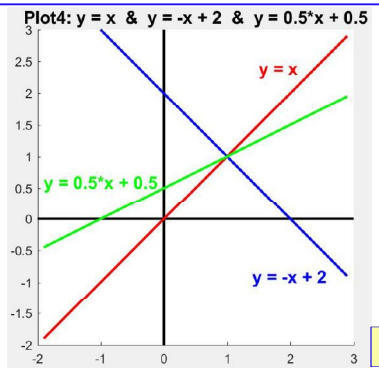
```
> A = [ 1 2; 2 4 ]
A =
     1     2
     2     4
> det(A)
ans =
   0
> b = [ 3; 4]
b =
     3
     4
>> x = A\b
Warning: Matrix is singular
to working precision.
x =
   Inf
  -Inf
```

```
> A(2,2) = 3.999999999999995
A =
    1.0000    2.0000
    2.0000    4.0000
> det(A)
ans =
  -8.8818e-16
> x = A\b
Warning: Matrix is close to singular
or badly scaled. Results maybe
inaccurate. RCOND = 2.467162e-17.
x =
   1.0e+15 *
   -4.5036
    2.2518
Probe: A*x
   3.0000
   5.0000
```

7.2 Linksdivision m != n

3 Gleichungen mit 2 Unbekannten – hier gibt es eine exakte Lösung

```
A = [-1 1; 1 1; -0.5 1]
b = [0; 2; 0.5]
disp('Gleichungssystem lösen')
x = A\b
%x = mldivide(A,b)
disp('Probe: A*x=b')
b1 = A*x
```



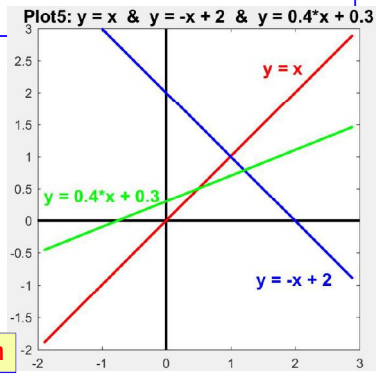

```
A =
   -1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
   -0.5000    1.0000
b =
         0
    2.0000
    0.5000
Gleichungssystem lösen
x =
    1.0000
    1.0000
Probe: A*x=b
b1 =
   -0.0000
    2.0000
    0.5000
```

lingln3.m

7.2 Linksdivision m != n

3 Gleichungen mit 2 Unbekannten – hier existiert keine exakte Lösung
MATLAB berechnet eine least-square-solution (eine bestmögliche Lösung)

```
A = [-1 1; 1 1; -0.4 1]
b = [0; 2; 0.3]
disp('Gleichungssystem lösen')
x = A\b
%x = mldivide(A,b)
disp('Probe: A*x=b')
b1 = A*x
```




```
A =
   -1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000
   -0.4000    1.0000
b =
         0
    2.0000
    0.3000
Gleichungssystem lösen
x =
    1.0380
    0.9051
Probe: A*x=b
b1 =
   -0.1329
    1.9430
    0.4899
```

lingln4.m

7.3 Gewöhnliches Eigenwertproblem

Definition :
A sei eine n*n-Matrix. Ein Vektor x heißt Eigenvektor der Matrix A, wenn es eine (reelle oder komplexe) Zahl λ gibt, für die gilt : A * x = λ* x
Die Zahl λ heißt Eigenwert zum Eigenvektor x.

Bemerkungen :

- Die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Gleichung A * x = λ* x nennt man spezielles oder gewöhnliches Eigenwertproblem.
- Satz : Ist die Matrix A symmetrisch, dann gibt es n reelle Eigenwerte und n linear unabhängige Eigenvektoren.
- Ist die Matrix A nicht symmetrisch, können Eigenwerte auch komplex sein. Es muss kein vollständiges System von n linear unabhängigen Eigenvektoren geben.

MATLAB :
Die Funktion `eig` berechnet Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix.
`EW = eig(A)` is a vector containing the eigenvalues of a square matrix A.
`[V,D] = eig(A)` produces a diagonal matrix D of eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that
`A*V = V*D` d. h. es gilt `A * V(:,k) = D(k,k) * V(:,k)`
`V(:,k)` k-ter Eigenvektor der Matrix A
`D(k,k)` k-ter Eigenwert der Matrix A

7.3 Gewöhnliches Eigenwertproblem

Beispiel :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

```
> EW = eig(A)
EW =
   -0.4203
    0.2336
   10.1867
>[ V  D ] = eig(A);
> V
V =
 -0.9269   0.0856   0.3653
  0.1307  -0.8389   0.5283
  0.3517   0.5374   0.7665
> D
D =
 -0.4203        0        0
       0   0.2336        0
       0        0  10.1867
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.9269 \\ 0.1307 \\ 0.3517 \end{bmatrix} = -0.4203 \cdot \begin{bmatrix} -0.9269 \\ 0.1307 \\ 0.3517 \end{bmatrix}$$

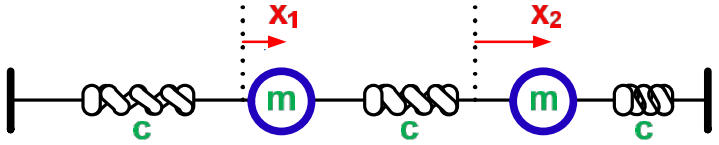
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0856 \\ -0.8389 \\ 0.5374 \end{bmatrix} = 0.2336 \cdot \begin{bmatrix} 0.0856 \\ -0.8389 \\ 0.5374 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3653 \\ 0.5283 \\ 0.7665 \end{bmatrix} = 10.1867 \cdot \begin{bmatrix} 0.3653 \\ 0.5283 \\ 0.7665 \end{bmatrix}$$

`A * V(:,3) = D(3,3)* V(:,3)`

eigenwertproblem.m

System von zwei Massen, die durch lineare (!!) Federn miteinander gekoppelt sind.



Bewegungsgleichungen :

$$m\cdot\ddot{x}_1(t) = -c\cdot x_1(t) - c\cdot\left[x_1(t) - x_2(t)\right]$$
$$m\cdot\ddot{x}_2(t) = -c\cdot\left[x_2(t) - x_1(t)\right] - c\cdot x_2(t)$$

Anfangsbedingungen :

$$x_1(t=0) = x_{10} \quad \dot{x}_1(t=0) = v_{10}$$
$$x_2(t=0) = x_{20} \quad \dot{x}_2(t=0) = v_{20}$$

Gesucht ist die Lösung für das Anfangswertproblem, d.h. die Werte x_{10} und x_{20} und v_{10} und v_{20} sind zur Zeit t=0 vorgegeben; meist ist $v_{10}=v_{20} = 0$

Lösungsschritte :

- Schreibe das Problem (DGL lösen) in ein Eigenwert- Eigenvektorproblem um
- Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren mit MATLAB
- Berechne den Anteil der jeweiligen Eigenvektoren an der Gesamtlösung aus den Anfangsbedingungen mit MATLAB – lineare Gleichungssysteme lösen
- Lösung ergibt sich durch Überlagerung der Eigenvektoren (Eigenschwingungen)

Bei linearen Problemen kann dieses Verfahren immer angewendet werden.

Spezielles Eigenwert-Eigenvektor-Problem :

$$\begin{bmatrix} 2\cdot c/m & -c/m \\ -c/m & 2\cdot c/m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \omega^2\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A\cdot x = \lambda\cdot x$$

Analytische Lösung – ohne MATLAB als Hausaufgabe :

Zwei Eigenwerte:

$$\lambda_1 = c/m \qquad \lambda_2 = 3\cdot c/m$$

Zwei Eigenfrequenzen:

$$\omega_1 = \sqrt{c/m} \qquad \omega_2 = \sqrt{3\cdot c/m}$$

Zwei Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Normierte Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = a_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\cos(\sqrt{c/m}\cdot t) + a_2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\cos(\sqrt{3c/m}\cdot t) + b_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\sin(\sqrt{c/m}\cdot t) + b_2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\sin(\sqrt{3c/m}\cdot t)$$

Allgemeine Lösung

a_1, a_2, b_1 und b_2 aus den Anfangsbedingungen bestimmen

Löse lineare Gleichungssysteme

$$\vec{x}(t=0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = a_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}(t=0) = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \omega_1\cdot b_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \omega_2\cdot b_2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \omega_1\cdot b_1 \\ \omega_2\cdot b_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \omega_1\cdot b_1 \\ \omega_2\cdot b_2 \end{bmatrix}$$

Lösung mit Hilfe von MATLAB

$$\begin{bmatrix} 2\cdot c/m & -c/m \\ -c/m & 2\cdot c/m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \omega^2\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A\cdot x = \lambda\cdot x$$

Löse das Eigenwert- Eigenvektorprobleme : `[ V, D ] = eig(A)`

$$V = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

Für die Eigenwerte und die zughörigen Eigenvektoren gilt :

$$A\cdot V(:,1) = A\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \lambda_1\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} \qquad A\cdot V(:,2) = A\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \lambda_2\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = a_1\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}\cdot\cos(\omega_1\cdot t) + a_2\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\cos(\omega_2\cdot t) + b_1\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}\cdot\sin(\omega_1\cdot t) + b_2\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\sin(\omega_2\cdot t)$$

$$\vec{x}(t=0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = a_1\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} + a_2\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}(0) = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = b_1\omega_1\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} + b_2\omega_2\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1\omega_1 \\ b_2\omega_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1\omega_1 \\ b_2\omega_2 \end{bmatrix}$$

Lösungsschritte mit MATLAB

1. **'Steifigkeitsmatrix' definieren**

$$A = \begin{bmatrix} 2\cdot c/m & -c/m \\ -c/m & 2\cdot c/m \end{bmatrix}$$

2. **Eigenwert- Eigenvektorproblem lösen** `[ V, D ] = eig(A)`

$$V = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \mathrm{sqrt}(\mathrm{diag}(D))$$

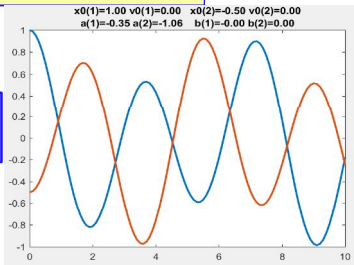
3. **Anteile der Eigenschwingungen aus den Anfangsbedingungen berechnen**
   Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit nach Eigenvektoren zerlegen

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = V\backslash\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\omega_1 \\ 1/\omega_2 \end{bmatrix}.*\,\mathrm{mldivide}\,(V, \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix})$$

4. **Lösung für das Anfangswertproblem :**

```
t = 0:0.1:10
x = V(:,1)*(a1*cos(ω1*t)+b1*sin(ω1*t)) +
    V(:,2)*(a2*cos(ω2*t)+b2*sin(ω2*t))
plot(t,x)
```

Beachte: x ist eine 2*101-Matrix!



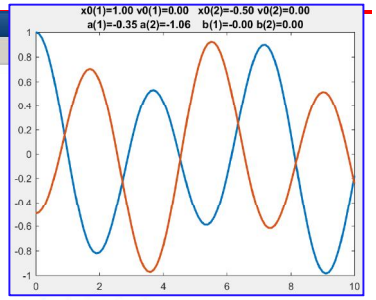
7.4 Anwendung : Lineare Kette

Editor - U:\Matlab\kette2mScr.m

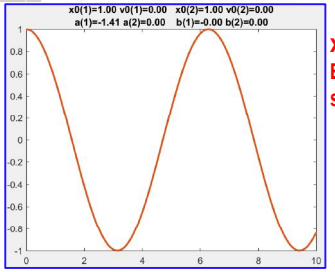
kette2mScr.m

```
1 -   cm = 1
2 -   x0 = [1; -0.5]
3 -   v0 = [0; 0]
4 -   A = [2*cm -cm; -cm 2*cm]
5 -   [V,D] = eig(A);
6 -   w = sqrt(diag(D));
7 -   a = V\x0
8 -   b = (1./w) .* (V\v0)
9 -   t=0:0.1:10;
10 -  x = V(:,1)*( a(1)*cos(w(1)*t) + b(1)*sin(w(1)*t) )+...
11        V(:,2)*( a(2)*cos(w(2)*t) + b(2)*sin(w(2)*t) );
12 -  plot(t,x,'lineWidth',2)
```

Frequenzen

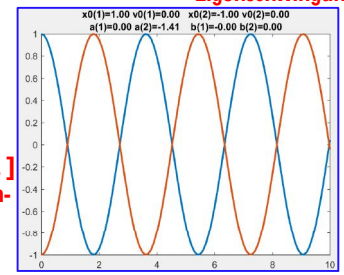


x0=[1; -0.5]
Überlagerung zweier Eigenschwingungen



x0=[1; 1]
Erste Eigenschwingung

x0=[1; -1]
Zweite Eigenschwingung



7.5 Verallgemeinertes Eigenwertproblem

Definition : verallgemeinertes Eigenwertproblem

A, B seien n*n-Matrizen. Ein Vektor x heißt Eigenvektor des verallgemeinerten Eigenwertproblems, wenn es eine (reelle oder komplexe) Zahl λ gibt, für die gilt : A * x = λ * B * x. Die Zahl λ heißt Eigenwert zum Eigenvektor x.

Bemerkung :

Existiert die inverse Matrix von B, dann lässt sich das verallgemeinerte Eigenwertproblem in ein spezielles Eigenwertproblem umschreiben

$$B^{-1} * | \quad A * x = \lambda * B * x$$
$$B^{-1} * A * x = \lambda * B^{-1} * B * x = \lambda * E * x$$
$$(B^{-1} * A) * x = \lambda * x$$

MATLAB :

Die Funktion `eig` berechnet auch Eigenwerte und Eigenvektoren des verallgemeinerten Eigenwertproblems. Zwei Matrizen werden als Parameter übergeben .

`EV = eig(A,B)` is a vector containing the generalized eigenvalues of square matrices A and B.

`[V,D] = eig(A,B)` produces a diagonal matrix D of generalized eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that `A*V = B*V*D` d. h. `A * V(:,k) = D(k,k) * B * V(:,k)`

7.6 Hausaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems :

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 2 \\ 3x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

Verwenden Sie einmal die Funktion `mldivide` und einmal den Operator für die Linksdivision.

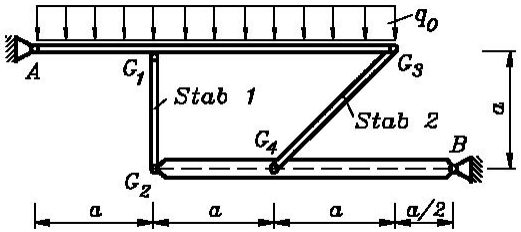
Zeigen Sie, dass ihr Ergebnis das Gleichungssystem tatsächlich löst. Wie kann man ganz einfach überprüfen, ob zwei Vektoren gleich sind (bis auf Rundungsfehler)?

Warum ist die Lösung eindeutig? Wie kann man das mit MATLAB überprüfen?

Schreiben Sie alle Befehle zur Lösung dieser Aufgaben in ein geeignetes Skript.

7.6 Hausaufgaben

Aufgabe 2 : Dankert/Dankert: Technische Mechanik www.tm-aktuell.de



Für die Berechnung der Lagerreaktionen und Stabkräfte im nebenstehenden System ergibt sich auf Basis der Gleichgewichtsbedingungen folgendes Gleichungssystem in Matrixform :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & -1.5 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} F_{AH} \\ F_{AV} \\ F_{BH} \\ F_{BV} \\ F_{S1} \\ F_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \cdot q_0 \cdot a \\ 4.5 \cdot q_0 \cdot a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Schreiben Sie ein Skript, das die Kräfte F für das obige Gleichungssystem berechnet. Wählen Sie für den Winkel 15° und für q_0*a den Wert 0.1 .

Aufgabe 3

Laden Sie die Datei `lager.m` in den Editor und versuchen Sie das Programm zu verstehen. Es werden die Gleichungen aus Aufgabe 2 gelöst. Starten Sie das Programm für verschiedene Parameter.
Welche Funktion hat die Variable `ausgabe`? Versuchen Sie die Ausgabeanweisung für die Matrix `M` zu verstehen. Warum muss man die transponierte Matrix von `M` in der `fprintf`-Anweisung verwenden? Was ergibt sich, wenn man die Matrix `M` verwendet?
Für welche Winkel ist die Matrix `M` singulär? Wie reagiert das Programm darauf? Zeigen Sie, dass die Berechnungen mit Hilfe der Linksdivision und die Berechnungen mit der inversen Matrix von `M` die gleichen Ergebnisse liefern.

Aufgabe 4

Laden Sie die Datei `lagerkraft.m` in den Editor und versuchen Sie das Programm zu verstehen. Welche Vorteile und Nachteile besitzt diese Funktion gegenüber der Funktion `lager.m`? Starten Sie das Programm.

Aufgabe 5

Laden Sie die Datei `eigenwertproblem.m` in den Editor und versuchen Sie das Programm zu verstehen. Es werden die Eigenwerte und die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix berechnet. Weiterhin wird gezeigt, dass die berechneten Eigenvektoren tatsächlich Eigenvektoren sind. Führen Sie das Skript aus und versuchen Sie die Ausgabe zu verstehen.

Kapitel 8 Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Gleichungen : $y(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 + 7 = 0$

$$\begin{aligned} 7 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 &= 7 \\ 8 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zu lösen bedeutet „suche die Nullstellen eines Polynoms“ und „suche die Lösungen für ein System von linearen Gleichungen“. Als Ergebnis erhält man reelle oder komplexe Zahlen oder auch keine Lösung, falls die Gleichungen nicht lösbar sind.

Differentialgleichung (DGL) : $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot y(t)$ „Schwingung“

Eine DGL stellt eine Beziehung zwischen den Ableitungen einer Funktion und der Funktion selbst dar. Im obigen Beispiel ist eine Funktion gesucht, deren zweite Ableitung proportional zum Funktionswert ist. Die DGL zu lösen bedeutet suche Funktionen, die diese Eigenschaft besitzen. Die Lösung einer DGL ist keine Zahl sondern eine Menge von Funktionen mit gewissen Eigenschaften. Diese Eigenschaften werden durch die DGL festgelegt.

Die obige DGL kann analytisch gelöst werden, d.h. man kann eine Lösung der DGL mit Hilfe von bekannten Funktionen angeben. Die allgemeine Lösung lautet :

$y(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t) + b \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad \omega^2 = k/m$ $\qquad y(t=0) = y_0 \quad \dot{y}(t=0) = v_0$

Die Größen a und b müssen durch zusätzliche Bedingungen festgelegt werden, z.B. durch Anfangs- oder Randbedingungen.

Numerische Lösung von Differentialgleichungen :

Eine analytische Lösung einer DGL (d.h. die Angabe der Lösungsfunktion durch bekannte Funktionen) ist häufig nicht möglich, insbesondere bei nichtlinearen DGLn. Selbst wenn eine DGL analytisch lösbar ist, kann die Lösung so komplex sein, dass man mit der Lösung nur wenig anfangen kann.

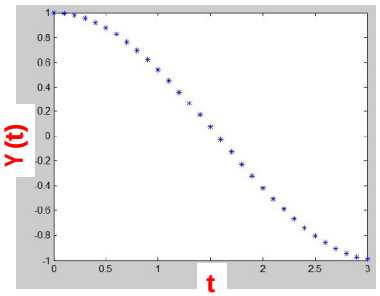
In der Praxis werden DGLn daher oft numerisch gelöst. Als Ergebnis erhält man keine Funktion sondern Zahlenwerte, die die Funktionswerte der „unbekannten Lösung“ näherungsweise darstellen. Diese Zahlenwerte werden meist in Vektoren oder Matrizen abgespeichert. Mit diesen Zahlenwerten lässt sich die Lösung graph. darstellen.

$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot y(t)$

DGL

t =	y =
0.00	1.00
0.10	0.955
0.20	0.825
0.30	0.621
0.40	0.362
0.50	0.070
...	...

Numerische Lösung



Gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung

- **Gewöhnliche** Differentialgleichungen (**Ordinary Differential Equations - ODEs**)
  In der DGL kommt nur **eine unabhängige Variable** vor, sowie eine unbekannte Funktion und deren Ableitungen. Die unabhängige Variable ist meist der Ort `x` oder die Zeit `t`. Neben der unabhängigen Variablen können in der DGL auch noch Parameter vorkommen und bekannte Funktionen, z.B. eine äußere Kraft. Die DGL für eine Schwingung enthält z.B. den Parameter $k/m = \omega^2$.
  Bei **partiellen DGL (PDE)** hat man **mehrere unabhängige Variablen** z.B. `x` und `t` oder `x`, `y`, `z` und `t`.
  Beispiel : Strömungsmechanik – PDEs werden hier nicht behandelt.
- **Ordnung** einer DGL
  In einer **DGL n-ter Ordnung** kommen Ableitungen nach der unabhängigen Variablen bis zur Ordnung `n` vor.
  Die DGL einer Schwingung ist eine DGL 2-ter Ordnung.
  In der Praxis ist die Ordnung von DGLn häufig kleiner gleich 4.
  Bei der numerischen Lösung von DGLn werden DGLn **n-ter Ordnung** meistens in ein **System von n DGLn erster Ordnung** umgeschrieben (**Standardform**).

8.2 Begriffe

Festlegung der Lösungen einer DGL

Eine DGL kann mehrere unabhängige Lösungen besitzen. Beispiel :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}\cdot y(t) \qquad y_1(t) = a\cdot\sin(\omega\cdot t) \quad , \quad y_2(t) = b\cdot\cos(\omega\cdot t) \quad , \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Da es sich um eine lineare DGL handelt, ist auch die Summe der beiden Lösungen wieder eine Lösung. Die allgemeine Lösung lautet deshalb :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = a\cdot\sin(\omega\cdot t) + b\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

Um die Größen a und b festzulegen sind weitere Bedingungen notwendig. In der Praxis treten meist zwei Arten von Bedingungen auf :

- **Anfangswertproblem**
  Der Funktionswert und die Werte der Ableitungen sind zu einem bestimmten Zeitpunkt oder an einem bestimmten Ort vorgegeben. Bei einer Schwingung z.B.

  $y(t=0) = y_0 \quad \frac{dy}{dt}(t=0) = v_0$ **oder** $y(t=0) = y_0 \quad \frac{dy}{dt}(t=0) = 0$

- **Randwertprobleme**
  Funktionswerte und/oder Werte der Ableitungen sind zu unterschiedlichen Zeitpunkten oder an verschiedenen Orten vorgegeben, z.B.

  $y(x=0) = 0$ **und** $y(x=a) = 0$

8.3 Einfache Beispiele

Beispiele :

a) $\frac{dy}{dx} = k$ b) $\frac{dy}{dx} = k\cdot y(x)$ c) $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}\cdot y(t)$

Lösungen :

Die ersten zwei Beispiele sind DGLn erster Ordnung. Das 3-te Beispiel ist eine DGL 2-ter Ordnung. Alle Lösungen enthalten noch freie Konstanten – a bzw. b . Diese Konstanten werden durch Anfangsbedingungen festgelegt, d.h. durch Bedingungen bei x=0 bzw. t=0. Bei einer DGL erster Ordnung reicht eine Anfangsbedingung, bei einer DGL 2-ter Ordnung sind zwei Anfangsbedingungen notwendig.

a) $y(x=0) = 3$ b) $y(x=0) = 4$ c) $y(t=0) = 3$ $\dot{y}(t=0) = 0$

Lösungen zu den vorgegebenen Anfangswerten :

Die Größe k in den Beispielen a) und b) ist ein Parameter, ebenso ω im Beispiel c). Für konkrete Werte von k und ω ergeben sich konkrete Lösungen.

8.4 Standardform einer DGL für numerische Lösungsverfahren

Die numerische Lösung für das Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung erfolgt meist in folgenden Schritten:

1. DGL umschreiben in ein System von DGLn erster Ordnung
   d.h. man bringt die DGL in eine Standardform
2. Geeignetes numerisches Lösungsverfahren auswählen
   Es gibt verschiedene Verfahren zur Lösung eines Systems von DGLn erster Ordnung. Meist verwendet man sogenannte Runge-Kutta-Verfahren.
3. Numerische Lösungsverfahren programmieren oder ein bereits implementiertes Verfahren wählen (MATLAB liefert eine Vielzahl von Verfahren, die von Experten programmiert worden sind)
4. Setzen der Anfangsbedingungen und Parameter und dann das Numerische Lösungsverfahren aufrufen
5. Lösung darstellen und überprüfen

8.4 Standardform einer DGL für numerische Lösungsverfahren

Die DGL einer Schwingung ist eine DGL 2-ter Ordnung. Diese DGL wird in ein System von zwei gekoppelten DGLn erster Ordnung umgeschrieben.
Dazu wird eine neue Variable `v(t)` eingeführt, die erste Ableitung von `y(t)` nach der Zeit `t` (d.h. `v(t)` ist die Geschwindigkeit). In der umgeschriebenen DGL kommen dann nur noch y und v sowie deren erste Ableitungen vor. Die zweite Ableitung von y wird durch die erste Ableitung von v ersetzt. Die beiden Variablen y und v können als Komponenten eines Vektors z mit zwei Komponenten aufgefasst werden, der von der Zeit `t` abhängt.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}\cdot y(t)$$

1) $\frac{dy}{dt} = v(t)$
2) $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\cdot y(t)$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = z(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

1) $\frac{dz_1(t)}{dt} = z_2(t)$
2) $\frac{dz_2(t)}{dt} = -\frac{k}{m}\cdot z_1(t)$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = f(t,y,v) = \begin{bmatrix} v \\ -k/m\cdot y \end{bmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = f(t,z_1,z_2) = f(t,z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -k/m\cdot z_1 \end{bmatrix}$$

Zwei gekoppelte DGLn erster Ordnung

Schreiben Sie die DGL für eine gedämpfte Schwingung mit äußerer Anregung in ein System von DGLn erster Ordnung um, ebenso die Anfangsbedingungen.

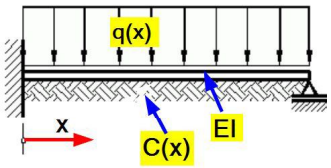
$$\ddot{y}(t) + 2\cdot\delta\cdot\dot{y}(t) + \omega_0^2\cdot y(t) = F\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

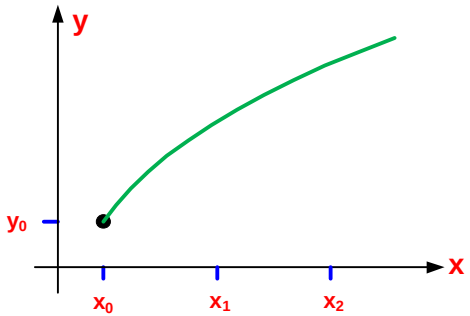
$$y(t=0) = y_0 \qquad \dot{y}(t=0) = v_0$$

Schreiben Sie folgende DGL 4-ter Ordnung (elastisch gebetteter Träger) in ein System von vier DGLn erster Ordnung um.

$$EI\cdot\frac{d^{(4)}y}{dx^4} + C(x)\cdot y(x) = q(x)$$

- **EI Biegesteifigkeit**
- **C(x) Steifigkeit der elastischen Bettung**
- **q(x) Streckenlast**





Numerische Lösung des Anfangswertproblems :

$$\text{DGL}: \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$$

Konkret :

$$\frac{dy}{dx} = x\cdot y^2 + 2 \quad , y(x_0 = 1) = 3$$

Der Funktionswert y_1 an der Stelle x_1 berechnet sich näherungsweise mit :

x_1 und y_1 werden danach zur Berechnung von $y_2 = y(x_2)$ verwendet, usw.

Eulersches Polygonzugverfahren

Eulersches Polygonzugverfahren für eine DGL erster Ordnung :

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\cdot(x_{n+1} - x_n) \qquad n = 0, 1, 2 \ \ldots$$

Eulersches Polygonzugverfahren für zwei DGLn erster Ordnung :

Aufgabe :

Stellen Sie die Gleichungen für das Eulersche Polygonzugverfahren zur Lösung der DGLn für eine Schwingung auf.

Ersetze die Differentialquotienten (Ableitungen) durch Differenzenquotienten.

DGL einer Schwingung :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\cdot y(t) = 0$$

AW:

$$y(t=0) = 5 \qquad \dot{y}(t=0) = 0$$

DGLn erster Ordnung :

$$1) \quad \frac{dy}{dt} = v(t)$$

$$2) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\cdot y(t)$$

$$y(t=0) = 5$$

$$v(t=0) = 0$$

8.5 Eulersches Polygonzugverfahren

Schreibe ein Skript, das das Anfangswertproblem für die DGL einer Schwingung nach dem Eulerverfahren im Zeitintervall `[0,10]` löst. Lösung graph. darstellen.

`k = 1, m = 2, y(t=0) = 5, v(t=0) = 0`

8.6 Runge-Kutta-Verfahren

Das Euler-Verfahren wird in der Praxis nicht verwendet, weil es bei vielen DGLn nicht funktioniert und weil es bessere Verfahren gibt. Standardverfahren zur Lösung von DGLn sind sogenannte **Runge-Kutta-Verfahren**.

Anfangswertproblem : $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad y_0 = y(x_0)$

Eulerverfahren :

Die **Steigung** f(x, y) im Bereich $[x_0, x_1]$ wird durch $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \qquad h = x_1 - x_0$ eine **Konstante ersetzt**, nämlich die Steigung im Punkt (x_0,y_0), d.h. durch den Wert $f(x_0,y_0)$. Die Steigung ändert sich aber im Bereich $[x_0, x_1]$.

Runge-Kutta-Verfahren :

Die Steigung f(x, y) im Bereich $[x_0, x_1]$ wird durch eine „gemittelte Steigung“ ersetzt. Beim klassischen Runge-Kutta-Verfahren berechnet man diesen Mittelwert aus den Steigungen an vier verschiedenen Stellen im Intervall wie folgt ($h = x_1 - x_0$):

$$y_1 = y_0 + (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)/6 = y_0 + h \cdot \bar{f}$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$$
$$k_2 = h \cdot f(x_0 + h/2,\ y_0 + k_1/2)$$
$$k_3 = h \cdot f(x_0 + h/2,\ y_0 + k_2/2)$$
$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h,\ y_0 + k_3)$$

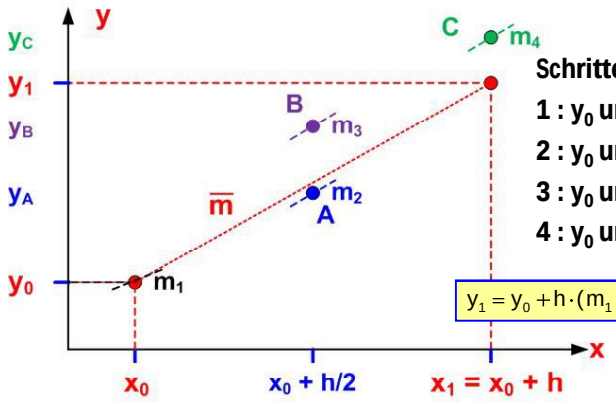
Berechne zuerst k_1, daraus k_2 , daraus k_3 ...
Aus den 4 Werten k_i wird der neue Funktionswert y_1 berechnet.

8.6 Runge-Kutta-Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren : $y_1 = y_0 + (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)/6$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = h \cdot m_1$$
$$k_2 = h \cdot f(x_0 + h/2,\ y_0 + h \cdot m_1/2) = h \cdot f(x_0 + h/2,\ y_A) = h \cdot m_2$$
$$k_3 = h \cdot f(x_0 + h/2,\ y_0 + h \cdot m_2/2) = h \cdot f(x_0 + h/2,\ y_B) = h \cdot m_3$$
$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h,\ y_0 + h \cdot m_3) = h \cdot f(x_0 + h,\ y_C) = h \cdot m_4$$

$$y_A = y_0 + h \cdot m_1/2$$
$$y_B = y_0 + h \cdot m_2/2$$
$$y_C = y_0 + h \cdot m_3$$



Schritte um y_1 zu berechnen

1 : y_0 und m_1 -> y_A und m_2

2 : y_0 und m_2 -> y_B und m_3

3 : y_0 und m_3 -> y_C und m_4

4 : y_0 und m_1, m_2,m_3,m_4 ->y_1

$$y_1 = y_0 + h \cdot (m_1 + 2 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 + m_4)/6$$

8.7 Runge-Kutta-Verfahren mit MATLAB

Löse das Anfangswertproblem für die DGL einer Schwingung mit `ode45`

- schreibe eine Funktion `schwingung`, die die beiden ersten Ableitungen als Funktion von y und v berechnet und als Spaltenvektor zurückgibt; y und v werden in einem Vektor mit zwei Elementen an die Funktion übergeben
- rufe im Skript `schwingung_ode45.m` die Funktion `ode45` auf, wobei die Funktion `schwingung` als Function-Handle übergeben wird

`schwingung_ode45.m`

```
% globale Parameter der DGL
global k m;

k = 1;
m = 2;
% Anfangsbedingungen
y0 = 5.0;
v0 = 0;

% DGL lösen
[t, erg] = ode45(@schwingung,[0,100],[y0,v0]);

plot(t,erg); % Lösung zeichnen
```

```
function dz_dt = schwingung(t,z)
global k m
  dz_dt(1,1) = z(2);
  dz_dt(2,1) = -k/m*z(1);
end
```

$$\frac{dy}{dt} = v(t)$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot y(t)$$

Beachte : erg ist eine Matrix mit zwei Spalten; t und erg haben gleich viel Zeilen

MATLAB stellt eine ganze Reihe von Verfahren zur Lösung von DGLn zur Verfügung. In vielen Fällen verwendet man die MATLAB-Funktion **ode45** (ein explizites Runge-Kutta-Verfahren mit automatischer Schrittweitensteuerung) . Der Aufruf von ode45 erfolgt typischerweise so :

```
>[t,y]=ode45(@fdgl,[ta,te],ya);
```

@fdgl:
ein function handle – Funktion fdgl berechnet die ersten Ableitungen
die Funktion fdgl ist von der Form dy_dx = f(x,y) oder dy_dt = f(t,y)
Die Größe x bzw. t ist ein Skalar, y ein Vektor mit n Elementen; dy_dx bzw. dy_dt ist ein Spaltenvektor mit n Elementen

[ta, te] :
der Bereich (Ort oder Zeit), in dem die Lösung berechnet wird

ya :
der Anfangswert der Lösung, d.h. der Wert von y an der Stelle t=ta
y0 ist ein Vektor mit n Elementen – bei einer Schwingung 2 Elemente

t und y :
die Lösung der DGL : t ist ein Vektor mit Werten im Bereich [ta, te]
y eine Matrix mit n Spalten und genauso vielen Zeilen wie t Elemente besitzt
- Schwingung Spalte 1 ist die Auslenkung und Spalte 2 die Geschwindigkeit

Aufruf der Funktion ode45 :

```
[t,y]=ode45(@fdgl,[ta,te],y0);
```

Die Matrix y besitzt k-Zeilen (wird von ode45 bestimmt) und n-Spalten.
y(i,j) : Wert der j-ten abhängigen Variablen zur Zeit t(i): $y_j(t(i))$

t(1)		ta	y(1,1)	y(1,2)	...	y(1,j)	...	y(1,n)
...								
t(i)	=	...	y(i,1)	y(i,2)	...	y(i,j)	...	y(i,n)
...								
t(k)		te	y(k,1)	y(k,2)	...	y(k,j)	...	y(k,n)
			y(:,1)	y(:,2)		y(:,j)		y(:,n)
			erste	zweite		j-te		n-te

unabhängige Variable

abhängige Variable

DGL einer Schwingung : Vektor y(:,1) enthält die Auslenkungen und Vektor y(:,2) die Geschwindigkeiten zu den entsprechenden Zeiten, d.h. y(i,1) ist die Auslenkung zur Zeit t(i) und y(i,2) die Geschwindigkeit

Die Funktion ode45 gibt einen Vektor t und eine Matrix y zurück. Der Vektor t besitzt k Zeilen und ebenso die Matrix y . Der Wert von k (also die Anzahl der Zeilen) hängt von vielen Faktoren ab.

Der Vektor t enthält die Zeiten, für die die Werte von y berechnet worden sind. Für das erste Element gilt t(1)= ta und für das letzte Element t(k)= te. Wie viele verschiedene t-Werte im Intervall [ta, te] verwendet werden, um die Lösung zu berechnen, hängt von vielen Faktoren ab. ode45 versucht einerseits, mit Hilfe einer Schrittweitensteuerung (Steuerung des Abstands aufeinanderfolgender Werte von t) die Anzahl der t-Werte k klein zu halten. Andererseits darf der Abstand aufeinanderfolgender t-Werte nicht zu groß sein, damit der Diskretisierungsfehler (Ersetzung der Ableitung durch Differenzenquotienten) nicht zu groß wird.

Sollen die Lösungen zu fest vorgegeben Zeiten berechnet werden, z.B. im Intervall zwischen 0 und 10 mit einer Schrittweite von 0.1, dann muss ode45 folgendermaßen aufgerufen werden :

```
[t,y]=ode45(@fdgl,0:0.1:10,y0);
```

t ist dann ein Vektor mit 101 Zeilen und y besitzt ebenfalls 101 Zeilen.


```
> help ode45
 ode45  Solve non-stiff differential equations, medium order
   method.[TOUT,YOUT] = ode45(ODEFUN,TSPAN,Y0) with TSPAN =
   [T0 TFINAL] integrates the system of differential equations
   y' = f(t,y) from time T0 to TFINAL with initial conditions
   Y0. ODEFUN is a function handle. For a scalar T and a vector
   Y, ODEFUN(T,Y) must return a column vector corresponding to
   f(t,y). Each row in the solution array YOUT corresponds to a
   time returned in the column vector TOUT.  To obtain
   solutions at specific times T0,T1,...,TFINAL (all increasing
   or all decreasing), use TSPAN = [T0 T1 ... TFINAL].

 See also ode23, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb,
   ode15i, odeset, odeplot, odephas2, odephas3, odeprint,
   deval, odeexamples, rigidode, ballode, orbitode,
   function_handle
```

```
> which ode45
C:\Program Files\MATLAB\R2017b\toolbox\matlab\funfun\ode45.m
```

Aufgabe 1

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot x \cdot y(x)$$

Schreiben Sie ein Skript, das die nebenstehende DGL mit Hilfe des Eulerverfahrens löst. Die Anfangsbedingung lautet `y(x=1)=3`.

Beim Start des Skripts gibt der Anwender einem Wert für k ein, einen Wert für die Schrittweite dx und einen Wert für den Endpunkt von x. Geben Sie die numerisch berechnete Lösung und die exakte Lösung graphisch aus. Geben Sie den relativen Fehler am rechten Intervallende aus.

Aufgabe 2

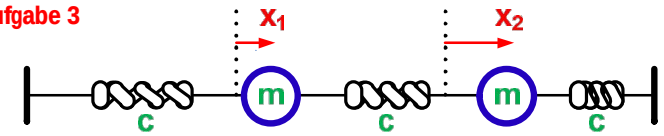
$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \delta \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = F \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y(t=0) = x_0 \qquad \dot{y}(t=0) = v_0$$

Lösen Sie die DGL für eine gedämpfte Schwingung mit äußerer Anregung unter Verwendung von ode45. Erstellen Sie ein Skript, das beim Aufruf den Anwender auffordert, die Parameter für der DGL einzugeben, ebenso die Anfangswerte. Dann wird die Lösung für das Anfangswertproblem berechnet.

Geben Sie die Lösung graphisch aus. Zeichnen Sie die Auslenkung und die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

Aufgabe 3



Bewegungsgleichungen :

$$m \cdot \ddot{x}_1(t) = -c \cdot x_1(t) - c \cdot [\, x_1(t) - x_2(t) \,]$$
$$m \cdot \ddot{x}_2(t) = -c \cdot [\, x_2(t) - x_1(t) \,] - c \cdot x_2(t)$$

$$x_1(t=0) = x_{10} \qquad \dot{x}_1(t=0) = v_{10}$$
$$x_2(t=0) = x_{20} \qquad \dot{x}_2(t=0) = v_{20}$$

Das obige Modell wird durch ein System von zwei gekoppelten DGLn 2-ter Ordnung beschrieben. Schreiben Sie die DGLn 2-ter Ordnung in ein System von 4 DGLn erster Ordnung um. Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten (siehe rechts). Wie lauten die DGLn für y?

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit ode45 und geben Sie die Lösungen graphisch aus. Schreiben Sie hierzu eine Funktion, die die Ableitungen berechnet und ein entsprechendes Skript zum Aufruf von ode45.

b) Versuchen Sie die Bewegung der zwei Massen in einer Animation darzustellen.

Aufgabe 4

Ein Flugzeug verwendet einen Bremsfallschirm und andere Mittel um nach der Landung zu bremsen. Die Änderung der Geschwindigkeit v beim Landen ist gegeben durch:

$$\frac{dv}{dt} = -0.0035 \cdot v^2 - 3$$

Zur Zeit t=0 befindet sich das Flugzeug an der Position s=0. Es öffnet den Bremsfallschirm und beginnt den Bremsvorgang. Das Flugzeug besitzt eine Geschwindigkeit von 300km/h.

- **Berechnet man die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit mit Hilfe von ode45, dann muss man ein M-File bereitstellen, das die erste Ableitung berechnet. Schreiben Sie das entsprechende M-File für die obige Differentialgleichung.**
- **Wie lautet der Aufruf der Funktion ode45 zur Berechnung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit um das Anfangswertproblem im Zeitraum [0,12] zu lösen? Die Geschwindigkeit soll in einer Variablen v gespeichert werden. Zeichnen Sie die Lösung.**

Kapitel 9 Einführung in Simulink

VDI-Richtlinie 3633: „Simulation ist das Nachbilden eines Systems mit seinen **dynamischen Prozessen** in einem **experimentierfähigem Modell**, um zu **Erkenntnissen zu gelangen**, die auf die **Wirklichkeit** übertragbar sind."

How Simulink Works (Simulink User's Guide)

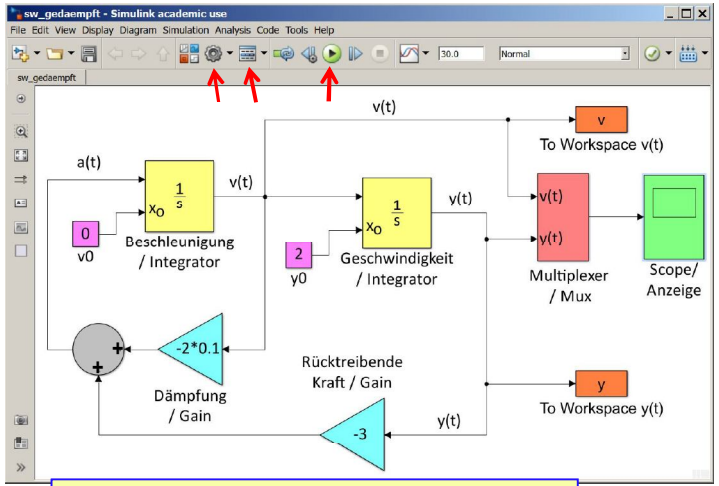
Simulink is a software package that enables you to model, simulate, and analyze systems whose outputs change over time. Such systems are often referred to as **dynamic systems**. The Simulink software can be used to **explore the behavior** of a wide range of **real-world** dynamic systems, including electrical circuits, shock absorbers, braking systems, and many other electrical, mechanical, and thermodynamic systems.

Simulating a dynamic system is a two-step process. First, a user creates a block diagram, using the Simulink model editor, that graphically depicts **time-dependent mathematical relationships** among the system's **inputs**, **states**, and **outputs**. The user then commands the Simulink software to simulate the system represented by the model from a specified start time to a specified stop time.

Mathematisches Modell eines einfachen dynamischen Systems :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2*0.1*\frac{dy}{dt} + 3*y(t) = 0$$

$$v0 = \dot{y}(t=0) = 0 \quad , y0 = y(t=0) = 2$$



Simulink-Modell für eine gedämpfte Schwingung

Blöcke :

- Integrator
- Addition
- Gain
- Constant
- Mux
- ToWorkspace
- Scope

Signale :

a(t) , v(t) , y(t)

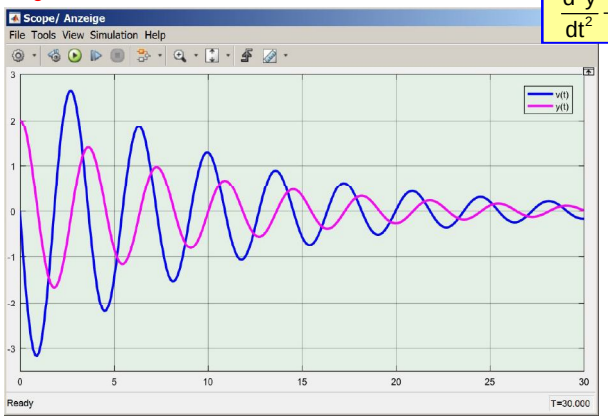
Systemzeit :

t - [0,30]

Ergebnis der Simulation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2*0.1*\frac{dy}{dt} + 3*y(t) = 0$$

$$\dot{y}(t=0) = 0, y(t=0) = 2$$



Die Blöcke **ToWorkspace** schreiben die Werte der Signale `y(t)` und `v(t)` zu bestimmten Zeiten in zwei Vektoren des MATLAB - Workspace. Die Zeitpunkte werden im Vektor `tout` gespeichert.

`tout(i)`$= t_i$

`y(i)` <=> `y(`t_i`)`

`v(i)` <=> `v(`t_i`)`

Für die Simulation kann ein Runge-Kutta-Verfahren mit fester Schrittweite verwendet (**ode4**, Schrittweite Δt=0.1) werden. Die Simulation erstreckt sich über ein Zeitintervall von [0,30].

Workspace

Name	Value	Min	Max
tout	301x1 double	0	30
v	301x1 double	-3.1709	2.6463
y	301x1 double	-1.6670	2

9.1 Was ist Simulink ? - Gedämpfte Schwingung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2*0.1*\frac{dy}{dt} + 3*y(t) = 0$$

$$v0 = \dot{y}(t=0) = 0\ ,\ \ y0 = y(t=0) = 2$$

Die DGL für eine gedämpfte Schwingung kann mit Simulink oder mit MATLAB gelöst werden.

Simulink :

- DGL (System) und Anfangsbedingungen über eine graphische(!!) Oberfläche definieren
- Simulink berechnet das zeitliche Verhalten des Systems selbstständig mit Hilfe geeigneter Verfahren (z.B. `ode45` oder `ode4`)
- Ergebnisse mit geeigneten Blöcken darstellen
- Ergebnisse in Variablen des MATLAB-Workspace speichern

MATLAB :

- DGL in ein System von DGLn erster Ordnung umschreiben und in einer MATLAB-Funktion codieren (siehe `schwingung.m`).
- DGL mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens lösen (expliziter Aufruf der Funktion `ode45` oder `ode4` oder ...) Die Ergebnisse werden über Rückgabewerte in einem Array gespeichert.
- Ergebnisse mit Hilfe des `plot`-Befehls graphisch darstellen oder weiterverarbeiten

Kap 9 Einführung in Simulink

Kapitel 9 Einführung in Simulink

9.2 Erstes Simulink-Modell erstellen

Aufgabe :

Das Signal $a(t) = A_0 * \sin(\omega * t)$ und das Integral dieses Signals über die Zeit sollen graphisch dargestellt werden. Lösen Sie die Aufgabe mit Simulink für das Zeitintervall [0, 10].

Welche Blöcke sind für diese Aufgabe notwendig ?

- Block, der ein Sinussignal erzeugt – Parameter : Amplitude, Frequenz
- Block, der ein Signal von 0 bis t integriert
- Block, der Signale über der Zeit darstellt
- eventuell weitere Hilfsblöcke

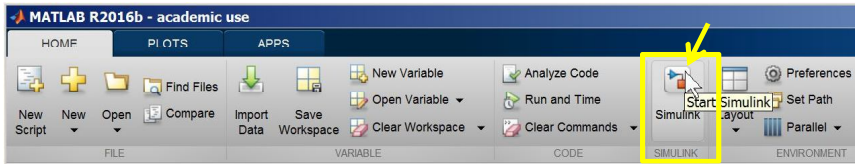
Teilaufgaben :

1) Simulink starten
2) Ein neues Simulink-Modell erstellen
3) Simulation starten
4) Das Ergebnis der Simulation analysieren

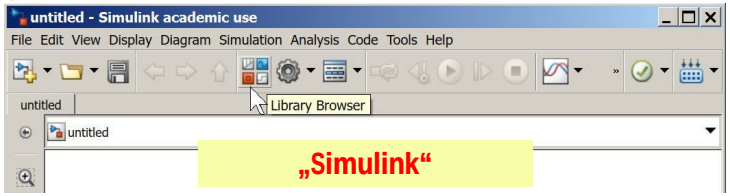
9.2.1 Simulink starten

Um mit Simulink zu arbeiten muss zuerst MATLAB gestartet werden. Danach kann Simulink auf verschiedene Arten geöffnet werden.

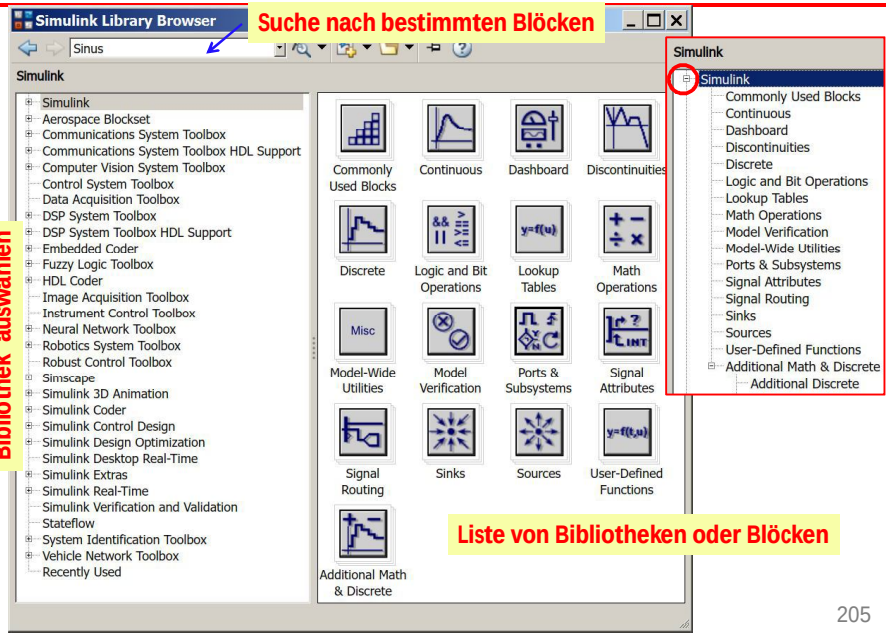
- **Über das Icon „Simulink“ in der MATLAB Toolbar. Es öffnet sich die „Simulink Start Page“. Über „Blank Model“ wird ein neues Simulink-Modell erzeugt oder man öffnet ein bestehendes Simulink-Modell.**



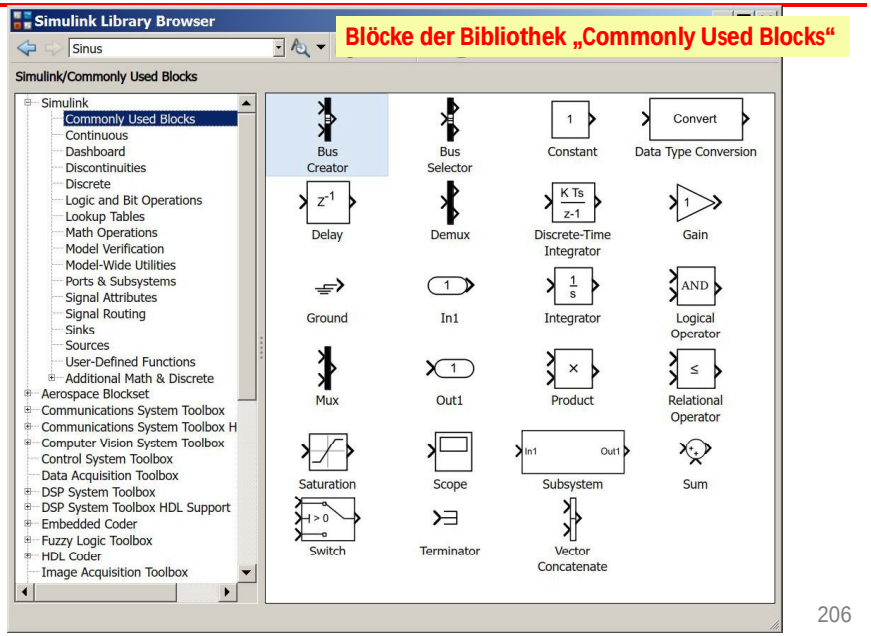
- **Im MATLAB Command-Window den Befehl `simulink` eingeben – es wird wieder die „Simulink Start Page“ geöffnet.**
- **Doppelklick auf ein existierendes Simulink-Modell im Fenster „Current Folder“**



9.2.1 Simulink starten - Simulink Library Browser



9.2.1 Simulink starten - Simulink Library Browser

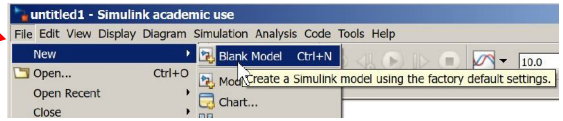


9.2.2 Simulink-Modell erstellen

Nach dem Start von Simulink wird ein neues Simulink-Modell erzeugt oder ein bereits vorhandenes Simulink-Modell geöffnet.

Simulink-Modelle werden in Dateien mit der Endung `.slx` gespeichert (veraltet `.mdl` abgeleitet von model). Diese Dateien sind Binärdateien und nur mit Simulink lesbar.

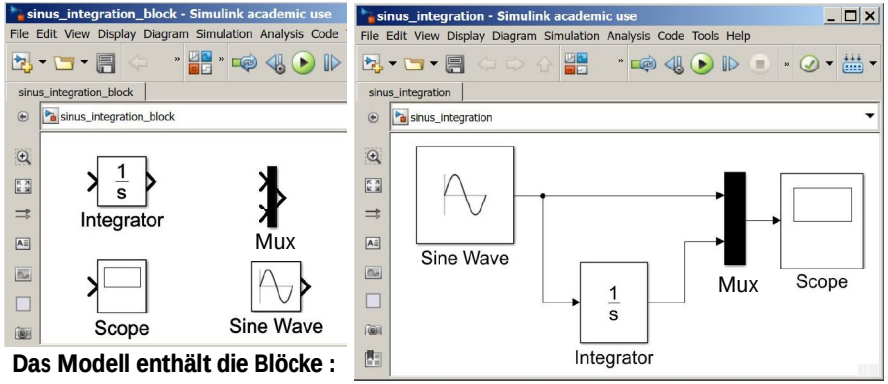
- **Neues (leeres) Simulink-Modell erstellen**
  1. **Simulink File->New ->Blank Model**
  2. **File->Save**
  3. **Dateinamen für das Modell eingeben**



- **Vorhandenes Simulink-Modell öffnen – auf mehrere Arten möglich**
  - **Wähle in Simulink „File -> Open“ und selektiere die Datei, in der das Modell gespeichert ist.**
  - **Doppelklick auf die Simulink-Datei (Datei mit der Endung `.slx`)**
  - **Dateinamen im MATLAB Command-Window eingeben.**
  - **Wähle „File -> Open“ im Menü von MATLAB**

9.2.2 Simulink-Modell erstellen

Im Simulink Library Browser werden die notwendigen Blöcke für das Modell gewählt und in ein leeres Modell gezogen (links). Anschließend werden die Blöcke sinnvoll angeordnet, miteinander verbunden und konfiguriert (rechts).

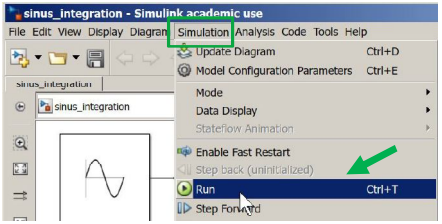


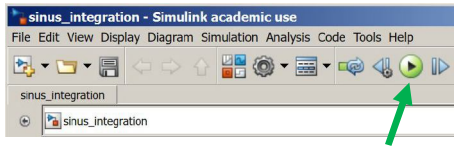
Das Modell enthält die Blöcke :

- **Integrator**
- **Multiplexer (Mux)**
- **Scope – für die Anzeige der Ergebnisse**
- **Sinusgenerator (Sine Wave) aus der Bibliothek Sources**

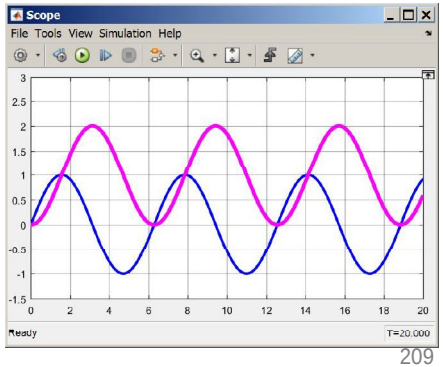
9.2.3 Simulation durchführen

Ein Simulink-Modell wird über den Button Run der Toolbar gestartet oder über das Menü Simulation -> Run oder mit Ctrl+T .





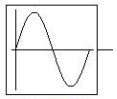
Das Ergebnis der Simulation wird angezeigt, wenn man den Scope-Block per Doppelklick öffnet. Im vorliegenden Simulink-Modell hat der Scope-Block ein Eingangssignal, das aus zwei Teilsignalen besteht. Der Mux-Block erzeugt aus zwei skalaren Signalen ein vektorwertiges Signal, das in den Scope-Block geführt wird.

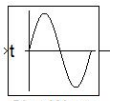


Damit in der Zeichnung eine glatte Kurve dargestellt wird, muss die Schrittweite bei der Simulation begrenzt werden, z.B. auf $\Delta t = 0.05$.

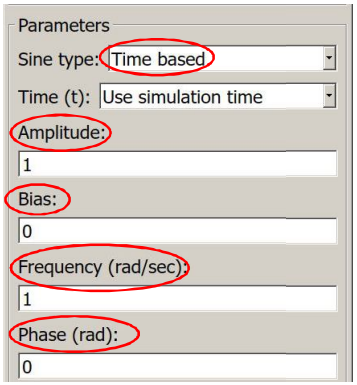
9.2.4 Sine Wave-Block

Sine Wave - Sinusgenerator





Erzeugt ein sinusförmiges Signal



Sine type :

- **Time based**

  `y(t)=Amp*sin(Freq*t+phase)+bias`

  Freq = 2*pi bedeutet eine Periode pro Sek
  Die Konstante pi kann verwendet werden

  `1 rad == 360°/(2*pi)`

- **Sample based**

  Siehe Simulink-Hilfe

Time (t) :

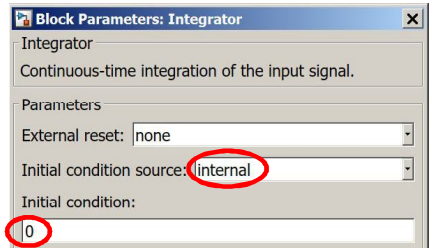
- **Use Simulation time – kein Eingang**
- **Use external signal – mit Eingang**

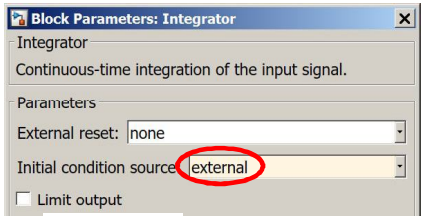
Aufgaben :

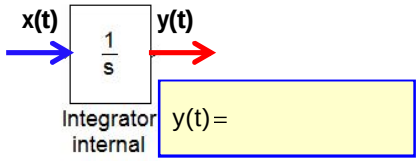
- **5 Schwingungen pro Sekunde, Amplitude 2**
- **3.7 Schwingungen pro Sekunde, Anfangsphase 35°**
- **Welche Wirkung hat bias = 2 ?**

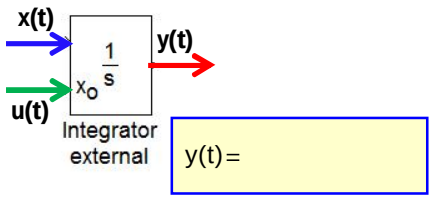
9.2.5 Integrator-Block

Der Integratorblock integriert das Eingangssignal von der Startzeit (Default 0) bis zur aktuellen Zeit t. Zusätzlich muss noch eine Anfangsbedingung festgelegt (Initial condition) werden. Das Symbol für den Integrator-Block 1/s stammt aus der Theorie der Laplace-Transformationen (Integration im Orginalraum entspricht die Division durch s im Bildraum).



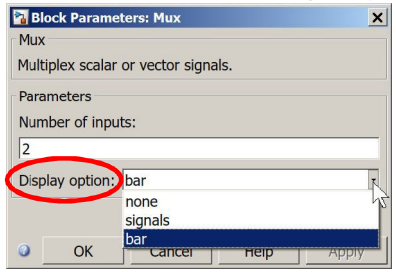






9.2.6 Mux-Block

Mux : Combine several input signals into vector



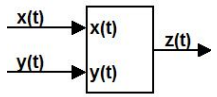
bar

signals

none

Mit Hilfe der „Display option“ wird die Darstellung des Mux-Blocks festgelegt. Wählt man die Option „signals“ , werden an den Eingängen die Namen der Eingangssignale gezeigt. Dadurch wird ein Modell besser lesbar.

Ein Mux-Block erzeugt aus mehreren Eingangssignalen ein vektorwertiges Signal – mehrere Einzelsignale werden zu einem einzigen Signal zusammengefasst.

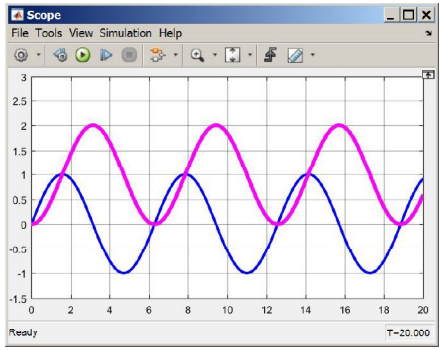


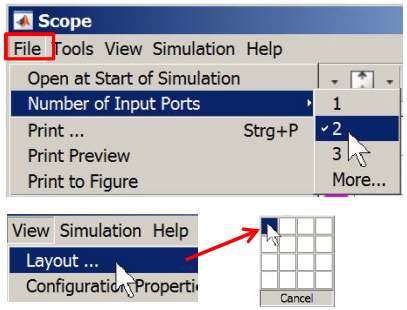
$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} z_1(t) &= x(t) \\ z_2(t) &= y(t) \end{aligned}$$

K9_17

9.2.7 Scope-Block

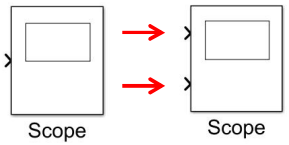
Der Scope-Block dient zur graphischen Darstellung von Signalen. Es werden die Eingangssignale als Funktion der Simulationszeit angezeigt.





Number of Input Ports :

Legt die Anzahl der Eingänge des Scope-Blocks fest. Die Signale an jedem der Eingänge werden in separaten Teilfenstern dargestellt; welche Teilfenster angezeigt werden, wird über das Menü View->Layout bestimmt. Jedes Teilfenster kann ein oder mehrere Kurven gleichzeitig darstellen (-> MUX).

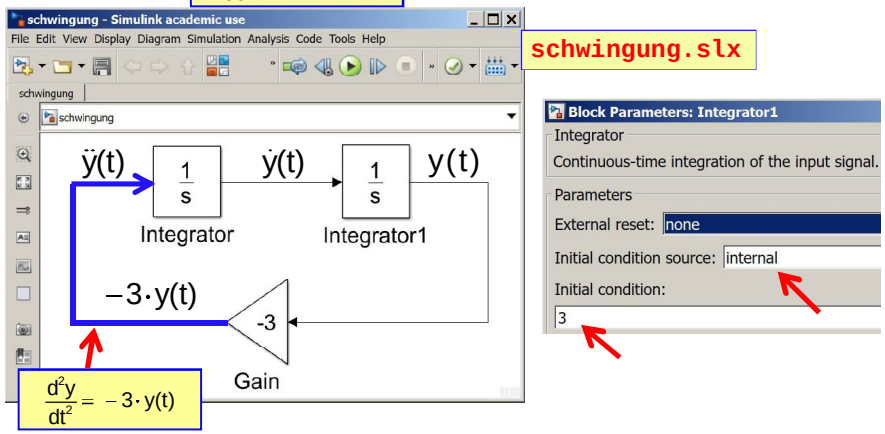


K9_18

9.3.1 Einfachste Schwingung - Harmonischer Oszillator

DGL für eine Schwingung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \cdot y(t) = 0 \qquad y(t=0) = 3 \;,\quad \dot{y}(t=0) = 0$$



schwingung.slx

Die Anfangsbedingungen für die Lösung der DGL werden in den beiden Integratorblöcken (Initittial condition) gesetzt. Man kann die Anfangsbedingungen auch extern setzen, über einen Constant-Block. Beachte : Das obige Simulink-Modell beschreibt nur die DGL für eine Schwingung. Es ist keine Lösung der DGL.

K9_19

9.3.2 Berechnung der Lösung für eine Simulation

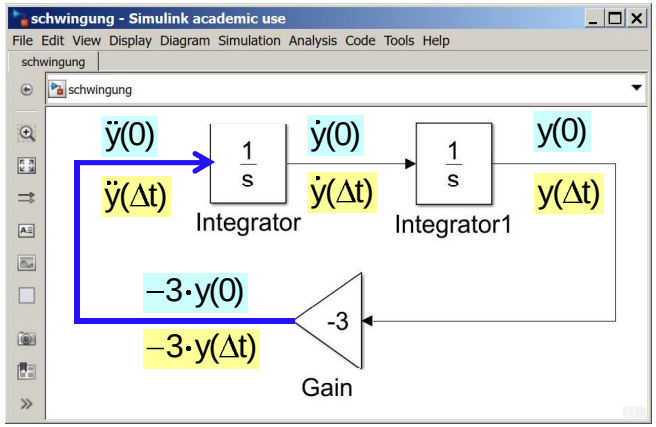
DGL für eine Schwingung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \cdot y(t) = 0 \qquad y(t=0) = 3 \;,\quad \dot{y}(t=0) = 0$$

Wie kann man mit Hilfe der Information, die im Simulink-Modell enthalten ist, eine Lösung berechnen ?

Annahme : Zur Zeit t=0 sind Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung bekannt.

Wie erhält man daraus die Größen zur Zeit t=Δt ?

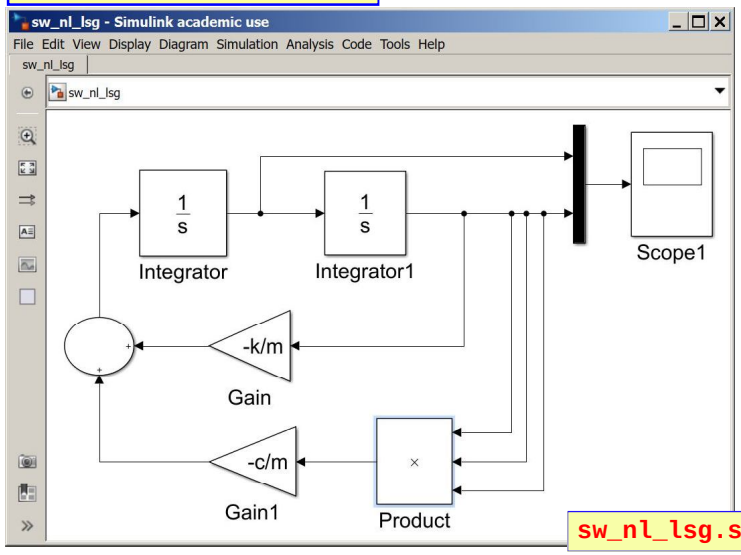


K9_20

9.3.3 Nichtlineare Schwingung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot y(t) + \frac{c}{m} \cdot y^3(t) = 0$$

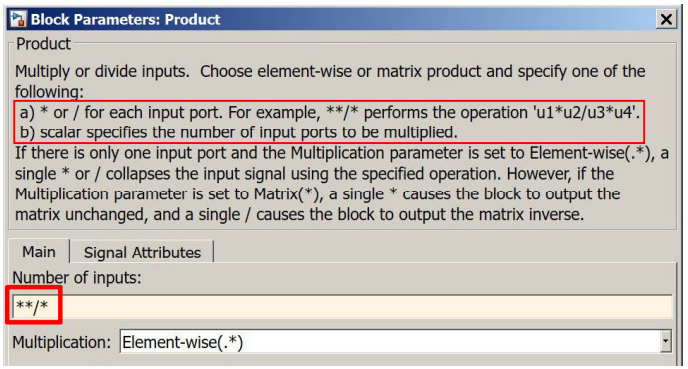
Der Term ~ y³ ist ein sogenannter nichtlinearer Term.



sw_nl_lsg.slx

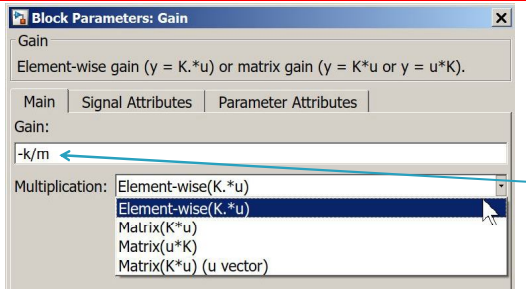
K9_21

9.3.3 Nichtlineare Schwingung – Product-Block

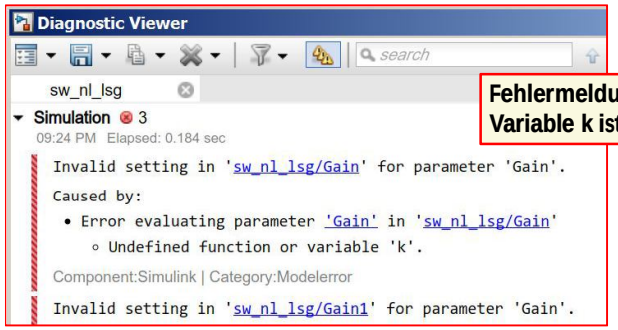


K9_22

9.3.4 Parameter in Simulink-Modellen



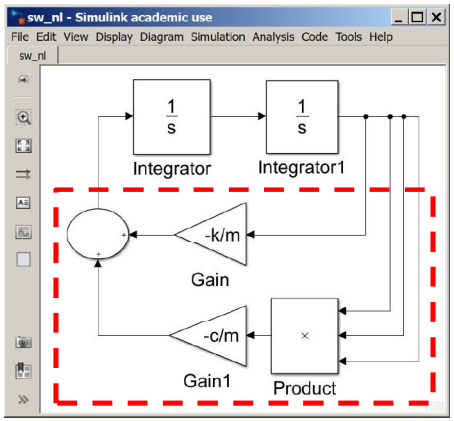
Die beiden Variablen k und m, die im Gain-Block verwendet werden, müssen im MATLAB Workspace gesetzt werden.



Fehlermeldung bei der Simulation. Variable k ist nicht definiert!

K9_23

9.4 Vereinfachung von Simulink-Modellen



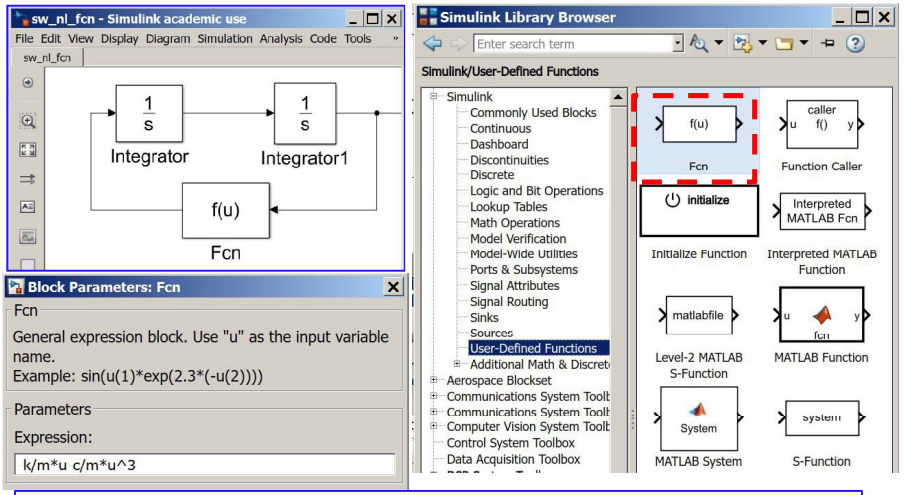
Der Teil des Modells, der die rücktreibende Kraft beschreibt (rot umrandet), soll "vereinfacht" werden.
Es wird eine kompakte Darstellung gesucht, die leichter lesbar und einfacher zu ändern ist. Hierzu werden folgende Blöcke verwendet :

- **Fcn-Block**
- **Subsystem-Block**
- **Skalare Signale zu vektorwertigen Signalen zusammenfassen**

Der Subsystem-Block wird oft auch dazu verwendet, um eine Hierarchie von Simulink-Modellen zu erzeugen. Auf oberster (abstrakter) Ebene des Simulink-Modells sieht man nur wenige einfache Blöcke und eine Reihe von Subsystem-Blöcken. In der nächsten Ebene werden die Subsystem-Blöcke genauer definiert. Die Subsystem-Blöcke können wiederum Subsystem-Blöcke enthalten, usw. .

K9_24

9.4.1 Function-Block

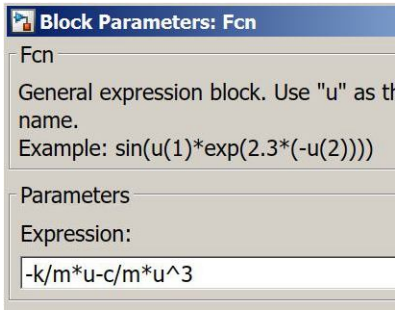


Ein Function-Block erzeugt ein Ausgangssignal als Funktion des Eingangssignals. Das Feld Expression enthält einen math. Ausdruck, der definiert, wie sich das Ausgangssignal als Funktion des Eingangssignals berechnet. Für das Eingangssignal muss immer der Name u verwendet werden.

K9_25

9.4.1 Function-Block

Das Feld Expression enthält einen math. Ausdruck, der definiert, wie sich das Ausgangssignal als Funktion des Eingangssignals berechnet. Für das Eingangssignal muss immer der Name u verwendet werden, egal wie das Eingangssignal extern bezeichnet wird.

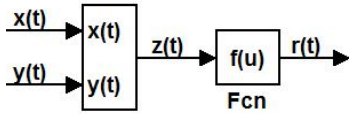


Die Eingangsgröße kann ein skalares oder ein vektorielles Signal sein. Ist die Eingangsgröße ein Vektor, dann wird die i-te Komponente des Signals mit `u(i)` bezeichnet.

Die Ausgangssignal muss stets ein skalares Signal sein!

Die Regeln, wie der Ausdruck im Feld Expression gebildet wird und was dabei zu beachten ist, sind in der Hilfe ausführlich beschrieben.

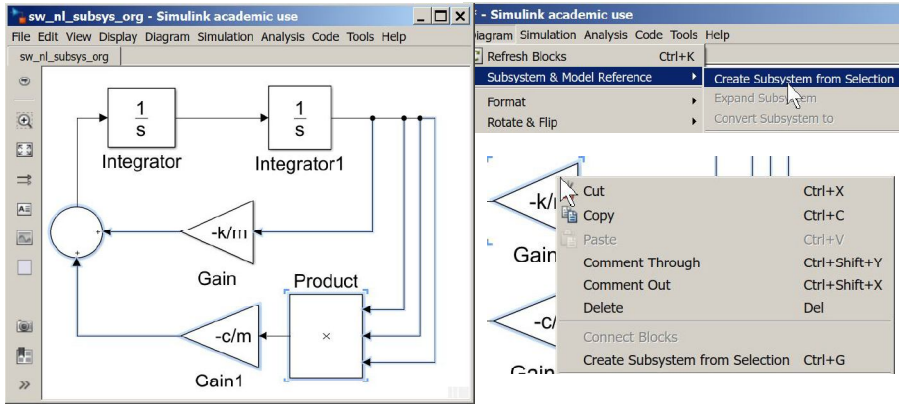
Aufgabe:
Ein Function-Block soll den Radius r(t) berechnen, der sich aus den Signalen x(t) und y(t) ergibt. Wie lautet der Ausdruck im Feld Expression des Function-Blocks?



K9_26

9.4.2 Subsystem-Block

Anstelle eines Fcn-Blocks soll ein Subsystem-Block verwendet werden.



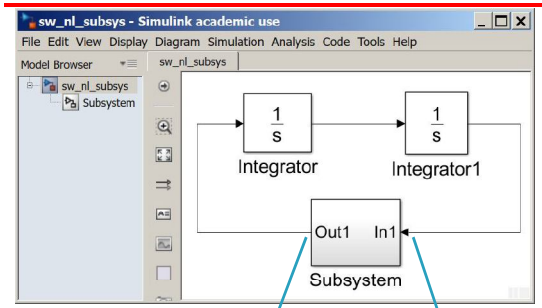
Selektiere alle Blöcke, die in den Subsystem-Block verlagert werden, ebenso die Eingangs- und die Ausgangssignale. Die Selektion kann auf zwei Arten erfolgen :

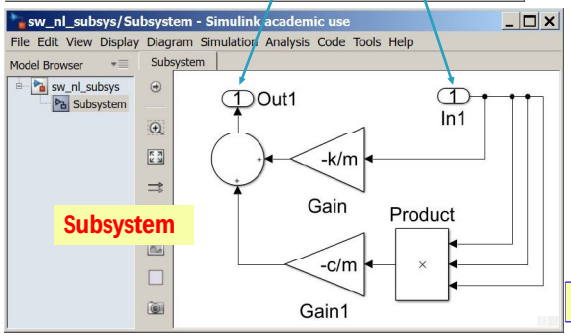
- einen rechteckigen Bereich mit Hilfe der Maus wählen
- Drücken der Shift-Taste und Selektion der Blöcke und Signale

Danach Menü Diagram-> Subsystem & Model Reference -> Create Subsystem from Selection oder Kontextmenü -> Create Subsystem from Selection wählen.

K9_27

9.4.2 Subsystem-Block





Nach dem Erzeugen des Subsystem-Blocks zeigt sich das Modell wie abgebildet. Mit dem Model-Browser (Menü View->Model Browser) kann man einfach im gesamten Simulink-Modell navigieren.

In diesem Beispiel gibt es jeweils nur ein Ein- und ein Ausgangssignal. Es können aber auch mehrere Signale in den Subsystem-Block geführt und mehrere Signale aus dem Subsystem herausgeführt werden. Beide Modelle werden in einer einzigen Datei gespeichert!

Ein Subsystem ist ein „Simulink-Model“ mit Ein- und Ausgängen

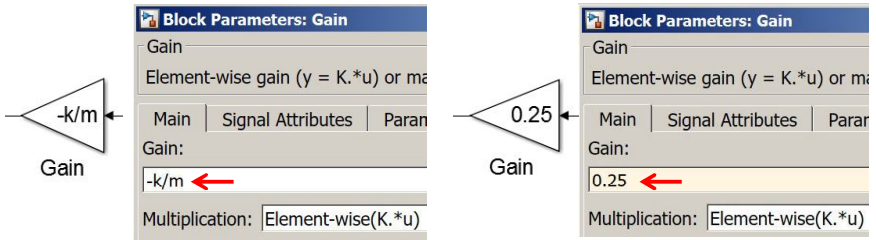
`sw_nl_subsys.slx`

K9_28

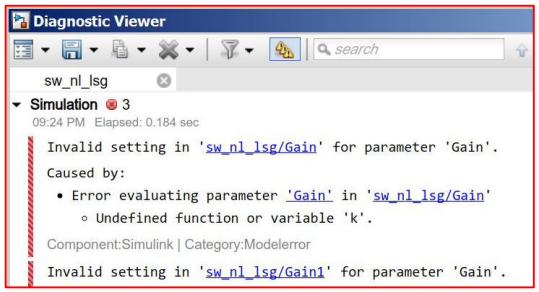
9.5.1 Parameter in Simulink-Modellen

Variablen, die im MATLAB-Workspace existieren, dürfen als Parameter in Simulink-Blöcken verwendet werden.

Beispiel : Gain-Block



Wird die Simulation gestartet und die Variablen k oder m sind nicht definiert, dann bricht die Simulation ab und es erscheint eine Fehlermeldung.



K9_29

9.5.1 Parameter in Simulink-Modellen

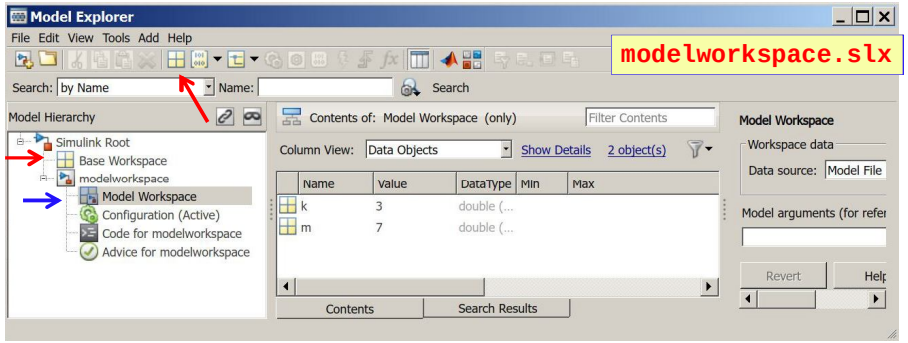
Simulink hat Zugriff auf zwei verschiedene Workspaces :

- **MATLAB-Workspace (= Base Workspace)**
- **Model-Workspace**

  Jedem Simulink-Modell ist ein eigener Workspace zugeordnet, der sogenannte Model-Workspace. Variablen aus dem Model-Workspace werden innerhalb eines Simulink-Modells definiert und können nur innerhalb des Modells verwendet werden. Die Definition dieser Variablen erfolgt über den Model-Explorer.

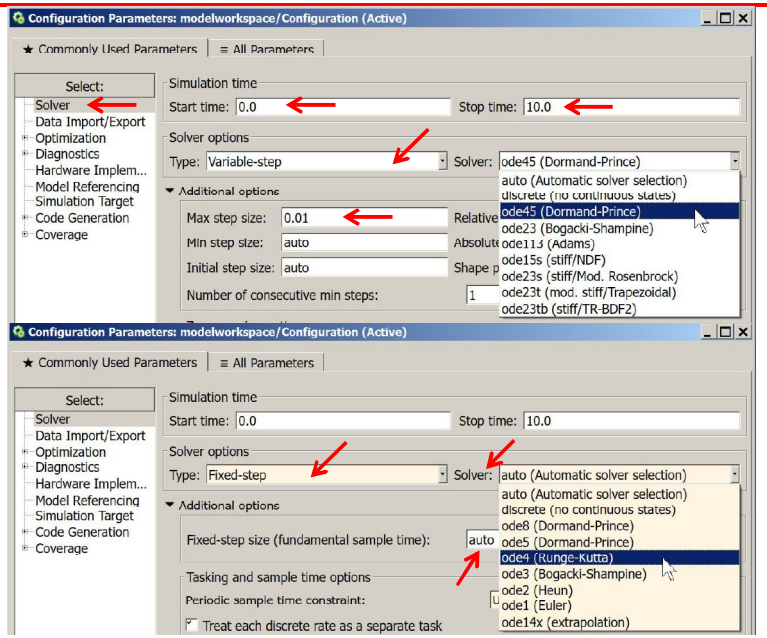
  Vorteil: Variablen aus dem Model-Workspace gehören zum Modell und werden im Simulink-Modell gespeichert (in der Datei mit der Endung slx).

  Variablen im Model-Workspace haben Vorrang vor Variablen im MATLAB-Workspace.



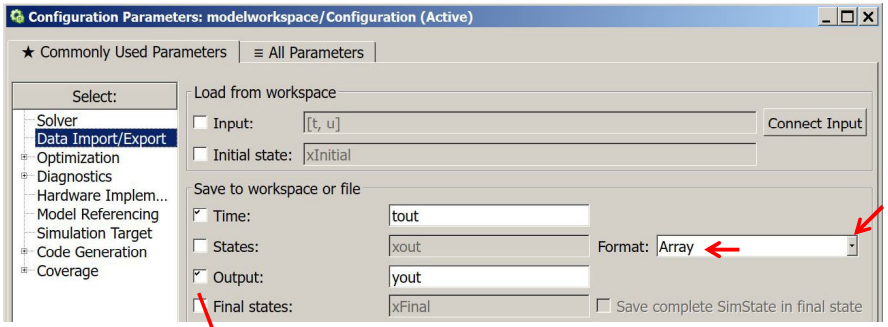
K9_30

9.5.2 Menü Simulation – Model Configuration Parameters



K9_31

9.5.2 Menü Simulation – Model Configuration Parameters

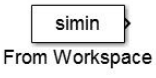


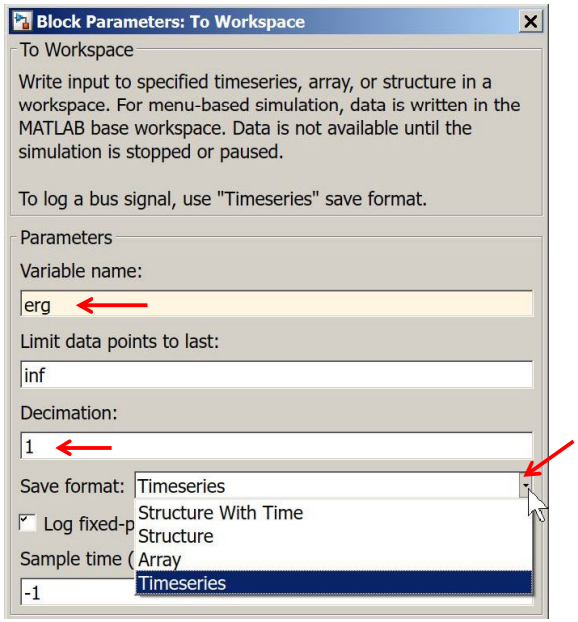
Die erste Spalte der Matrix `yout` enthält die Werte des Block Out 1. Dieser Block muss im Modell vorhanden sein, ansonsten werden keine Werte gespeichert. Die zweite Spalte der Matrix enthält die Werte des Blocks Out 2, falls dieser vorhanden ist, ...

Die Zeilen der Matrix beziehen sich auf die Zeitpunkte, die in tout gespeichert werden.

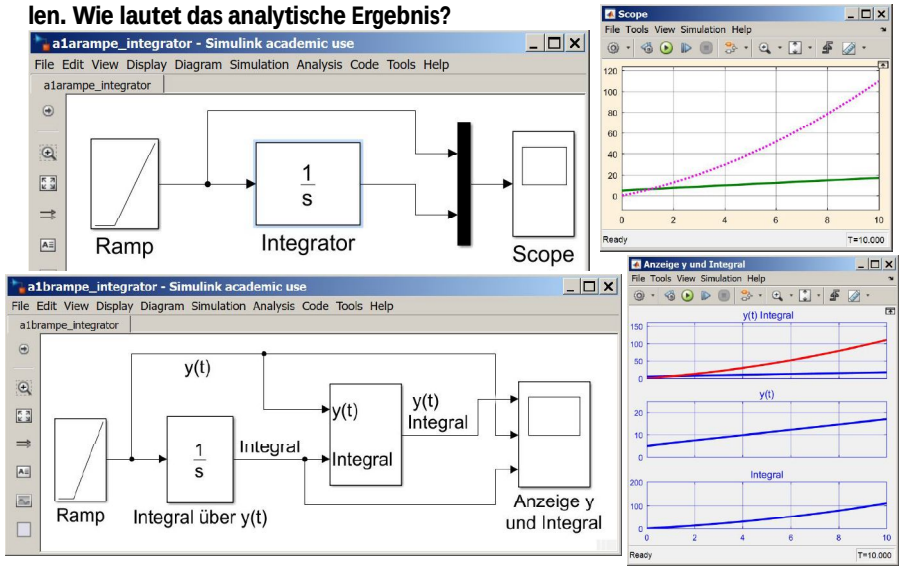
K9_32

9.5.3 Blöcke „To Workspace“ und „From Workspace“ . . .





Aufgabe 1 : Erstellen Sie zwei Simulink-Modelle, die die Funktion `y(t)=1.2*t+5` im Intervall von `[0,10]` integrieren und die Ergebnisse wie unten gezeigt darstellen. Wie lautet das analytische Ergebnis?



Aufgabe 2 :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\cdot\delta\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}\cdot y(t) + \frac{c}{m}\cdot y(t)^3 = 0$$

$$v0 = \dot{y}(t=0) = 0 \;,\; y0 = y(t=0) = 2$$

Lösen Sie die obige DGL mit Hilfe von Simulink. Der Ausdruck für die zweite Ableitung

$$-2\cdot\delta\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{k}{m}\cdot y(t) - \frac{c}{m}\cdot y(t)^3$$

wird auf verschiedene Arten berechnet:

- Mit Hilfe eines Function-Blocks (hierzu ist auch ein Mux-Block notwendig). Was muss im Feld “Expression” des Function-Blocks eingetragen werden?
- Mit einem Subsystem-Block, der zwei Eingänge besitzt.
- Mit einem Subsystem-Block, der nur einen Eingang besitzt. Verwenden Sie innerhalb des Subsystem-Blocks einen Demux-Block (Gegenstück zum Mux-Block).

Aufgabe 3 :

Ein Flugzeug verwendet einen Bremsfallschirm und andere Mittel um nach der Landung zu bremsen. Die Änderung der Geschwindigkeit v beim Landen ist gegeben durch:

$$\frac{dv}{dt} = -0.0035 \cdot v^2 - 3$$

Zur Zeit t=0 befindet sich das Flugzeug an der Position s=0. Es öffnet den Bremsfallschirm und beginnt den Bremsvorgang. Das Flugzeug besitzt eine Geschwindigkeit von 300km/h.
Erstellen Sie ein Simulink-Modell, das die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit im Intervall [0,12] berechnet und beide Größen in einem Scope-Block mit zwei Eingängen darstellt.

- Lösung 1:
  Das Simulink-Modell darf nur die Blöcke Sum, Product, Constant, Gain, Integrator (external Initial Condition) und Scope enthalten. Welche Werte müssen in den Constant-Blöcken und im Gain-Block eingetragen werden?
- Lösung 2:
  Das Simulink-Modell darf nur die Blöcke Function-Block, Constant, Integrator (external Initial Condition) und Scope enthalten. Welcher Wert muss im Constant-Block eingetragen werden? Geben Sie den Ausdruck an, der im Function-Block eingetragen werden muss. Der zurückgelegte Weg muss nicht berechnet werden.

Praktikum

Ingenieurinformatik
Teilmodul II

Numerik für Ingenieure
(Einführung in MATLAB/Simulink)

EDV-Labor - Sicherheitsunterweisung

Sicherheitsunterweisung:

- Es gilt die Laborordnung
- In den Laboren nicht Rauchen, Essen und Trinken
- Fluchtwege aus dem Labor auf den Flur ins Treppenhaus
- Grüne Fluchtwegemarkierungen an der Flurdecke
- Feuerlöscher auf dem Flur, Feuermelder in beiden Treppenhäusern
- Im Brandfall keinen Aufzug benutzen (möglicher Stromausfall)
- Im Brandfall die Fenster geschlossen halten
- Informationen an den Türen:
  Verhalten im Brandfall, Rufnummern für den Notfall, erste Hilfe

Ein Unfall – was ist zu tun?

- Verbandskästen in den Räumen B362 , B372 , B0055 (Sekretariat)
- Notausschalter sind in allen KCA-Laboren vorhanden

Bei Hard- und Softwareproblemen (Login nicht möglich, Fragen zu Netzwerklaufwerken/Backups usw.) helfen die Herren Schneider (Raum B350), Wagner und Tonch (B372).

Praktikum : Ingenieurinformatik - MATLAB / Simulink

Termin 1 : MATLAB Entwicklungsumgebung

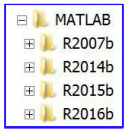
1.1 MATLAB starten

Im Praktikum wird MATLAB in der Version R2016b verwendet.
MATLAB ist auf allen Rechnern im 3-ten Stockwerk installiert

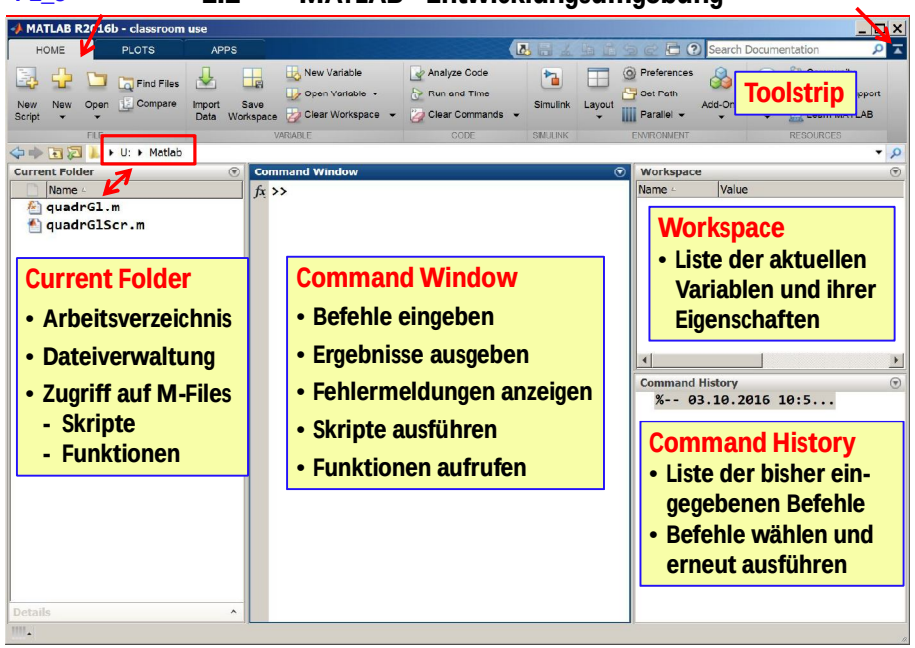
MATLAB starten :

- MATLAB – Icon doppelklicken
- Eintrag im Startmenü wählen
- Start -> Alle Programme -> MATLAB -> R2016b

Auf einem Rechner können verschiedene Versionen von MATLAB installiert sein.



1.2 MATLAB - Entwicklungsumgebung



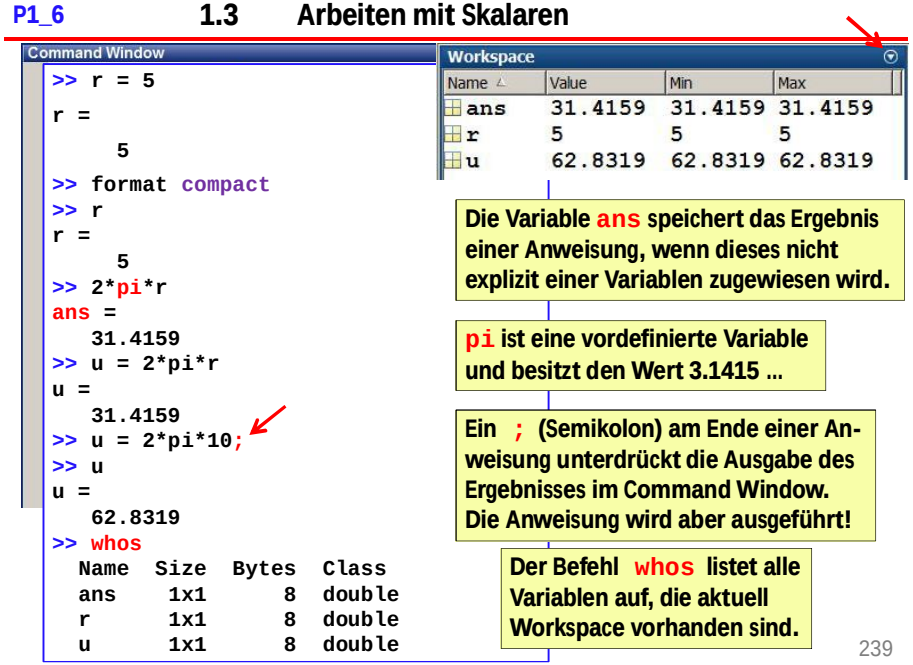
Current Folder
- Arbeitsverzeichnis
- Dateiverwaltung
- Zugriff auf M-Files
  - Skripte
  - Funktionen

Command Window
- Befehle eingeben
- Ergebnisse ausgeben
- Fehlermeldungen anzeigen
- Skripte ausführen
- Funktionen aufrufen

Workspace
- Liste der aktuellen Variablen und ihrer Eigenschaften

Command History
- Liste der bisher eingegebenen Befehle
- Befehle wählen und erneut ausführen

1.3 Arbeiten mit Skalaren



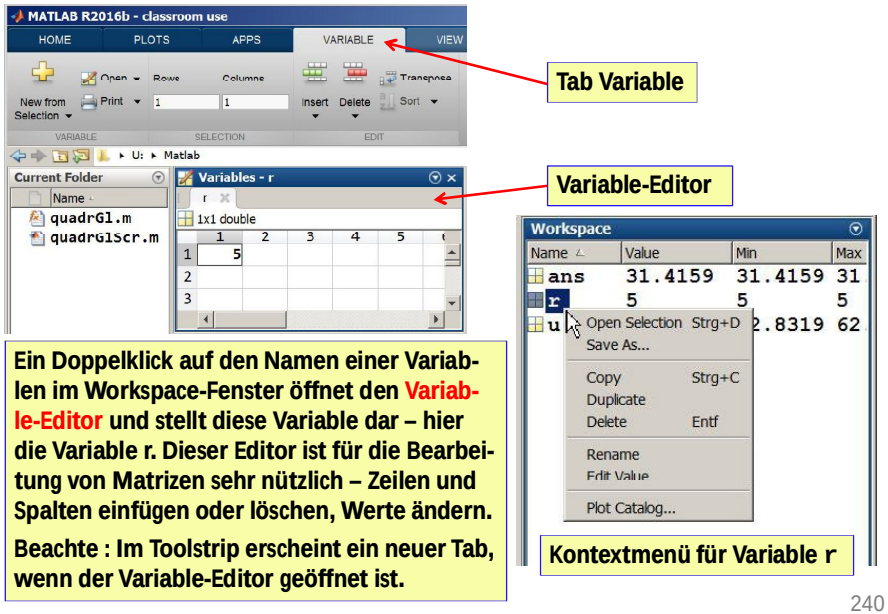
Die Variable `ans` speichert das Ergebnis einer Anweisung, wenn dieses nicht explizit einer Variablen zugewiesen wird.

`pi` ist eine vordefinierte Variable und besitzt den Wert 3.1415 ...

Ein `;` (Semikolon) am Ende einer Anweisung unterdrückt die Ausgabe des Ergebnisses im Command Window. Die Anweisung wird aber ausgeführt!

Der Befehl `whos` listet alle Variablen auf, die aktuell Workspace vorhanden sind.

1.3 Arbeiten mit Skalaren



Ein Doppelklick auf den Namen einer Variablen im Workspace-Fenster öffnet den **Variable-Editor** und stellt diese Variable dar – hier die Variable r. Dieser Editor ist für die Bearbeitung von Matrizen sehr nützlich – Zeilen und Spalten einfügen oder löschen, Werte ändern.

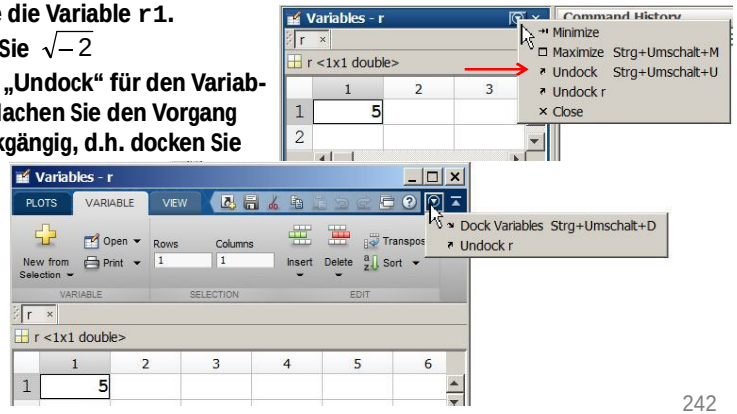
Beachte : Im Toolstrip erscheint ein neuer Tab, wenn der Variable-Editor geöffnet ist.

Anmerkungen :

- Bei MATLAB müssen Variablen nicht explizit definiert werden. Der Befehl `r = 5` erzeugt automatisch eine Variable vom Typ `double` mit dem Namen `r` und weist dieser den Wert `5` zu. Der Typ `double` ist der Standardtyp (Default-Typ) für Variablen.
- Der Befehl '`format compact`' bewirkt eine kompakte Darstellung der Ausgabe im Command-Window. Der Abstand zwischen den Zeilen ist klein.
- Die Variable `pi` ist eine vordefinierte Variable mit dem Wert `3.1415...`
- Die Variable `ans` ist ebenfalls eine vordefinierte Variable. Wird das Ergebnis eines Ausdrucks nicht explizit einer Variablen zugewiesen, so wird das Ergebnis der Variablen `ans` zugewiesen. Der alte Wert von `ans` wird überschrieben.
- Ein Semikolon `;` am Ende einer Anweisung unterdrückt die Ausgabe des Ergebnisses im Command-Window - der Ausdruck wird aber ausgeführt !
- Der Befehl `whos` gibt Informationen über die aktuell im Workspace vorhandenen Variablen aus. '`Size 1x1`' bedeutet, dass die entsprechende Variable eine 1*1-Matrix (d.h. ein Skalar) ist; in der Spalte `Bytes` wird der Speicherplatzbedarf der Variablen angezeigt; die Spalte `Class` gibt den Datentyp an.

Aufgaben

1. Geben Sie die Befehle `r=5, ...` nacheinander im Command- Fenster ein.
2. Ändern Sie den Wert von `r` über das Kontextmenü der Variablen auf `7`.
3. Ändern Sie den Wert von `r` mit Hilfe des Variable-Editors auf den Wert `10`.
4. Ändern Sie den Namen der Variablen in `r1`.
5. Geben Sie dann `r` und `r1` im Command-Window ein.
6. Löschen Sie die Variable `r1`.
7. Berechnen Sie $\sqrt{-2}$
8. Wählen Sie „Undock“ für den Variable-Editor. Machen Sie den Vorgang wieder rückgängig, d.h. docken Sie das Fenster wieder an.



Command Window

```
>> A = [1, 2; 3, 4]
A =
     1     2
     3     4
>> x = [2; 3]
x =
     2
     3
>> y = A*x
y =
     8
    18
>> A(2,2)
ans =
     4
>> x(2)
ans =
     3
>> x(2,1)
ans =
     3
```

```
>> whos
  Name   Size   Bytes  Class
  A      2x2       32  double
  y      2x1       16  double
  x      2x1       16  double
>> A(3,3) = 9
A =
     1     2     0
     3     4     0
     0     0     9
>> whos
  Name   Size   Bytes  Class
  A      3x3       72  double
  y      2x1       16  double
  x      2x1       16  double
>> A*x
Error using  *
Inner matrix dimensions must agree.
>> A(3,4)
Index exceeds matrix dimensions.
```


Aufgaben

1. Geben Sie die Befehle `A = [1, 2; 3, 4]`, ... (siehe vorherige Folie) der Reihe nach im Command-Window ein. Rechnen Sie die Matrix-Vektor-Multiplikation auf einem Blatt Papier nach! Im SS2013 konnte die Hälfte der Teilnehmer/innen der Informatik-Klausur diese Aufgabe nicht korrekt lösen!
2. Nach der Eingabe aller Befehle ist die Matrix A eine 3*3-Matrix. Löschen Sie mit Hilfe des Variable-Editors die 3-te Spalte und dann die 3-te Zeile der Matrix. Sie erhalten dann wieder eine 2*2-Matrix. Geben Sie diese aus.
3. Erzeugen Sie aus der 2*2-Matrix A eine 5*5-Matrix mit Hilfe des Variable-Editors.

Anmerkungen :

- Bei der Definition von Vektoren und Matrizen werden `[]`-Klammern verwendet. Zeilen werden bei der Definition durch einen Semikolon `;` voneinander getrennt, die Spalten durch Leerzeichen (Space) oder Komma `,` .
- Beim Zugriff auf die Elemente einer Matrix werden `()`-Klammern verwendet.
- Für einen Zeilenvektor gilt : `x(k) == x(1,k)`
- Für einen Spaltenvektor gilt : `x(k) == x(k,1)`

linear indexing !

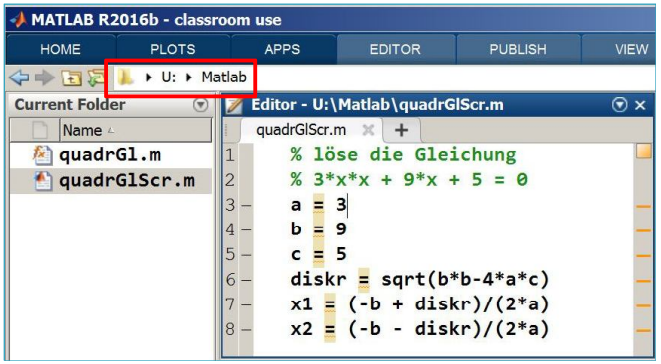
- Konvention : Namen von Matrizen werden in Großbuchstaben geschrieben.
- MATLAB unterscheidet Groß- und Kleinschreibung

Ein MATLAB-Skript ist eine ASCII-Datei, die MATLAB-Befehle enthält.

Wird das Skript ausgeführt, dann werden die Befehle, die in der Datei gespeichert sind, der Reihe nach abgearbeitet, so als würde man die Befehle hintereinander im Command-Window eingeben.

Aufgabe :

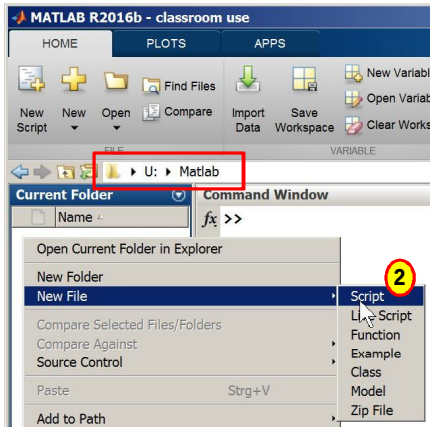
Erstellen Sie ein Skript `quadrGlScr.m` zur Lösung einer quadratischen Gleichung. Speichern Sie das Skript auf dem U-Laufwerk im Unterverzeichnis `matlab` (`U:\matlab\quadrGlScr.m`).

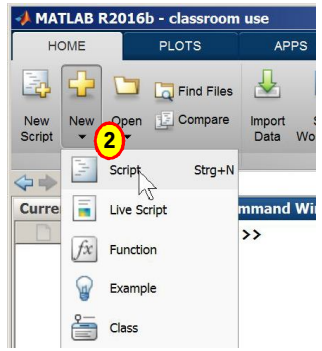


Teilaufgaben :

1) Legen Sie auf dem U-Laufwerk ein Verzeichnis mit Namen `matlab` an und setzen Sie dann den „Current Folder“ in MATLAB auf `U:\matlab`.

2) Erzeugen Sie ein MATLAB-Skript (neue Datei) mit Namen `quadrGlScr.m`. Hierzu wird entweder das Kontextmenü im Fenster Current Folder aktiviert oder es wird im Tab Home „New Script“ oder „New“ gewählt.





3) Schreiben Sie das Skript `quadrGlScr.m` und speichern sie es.

4) Führen Sie das Skript aus. Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten :

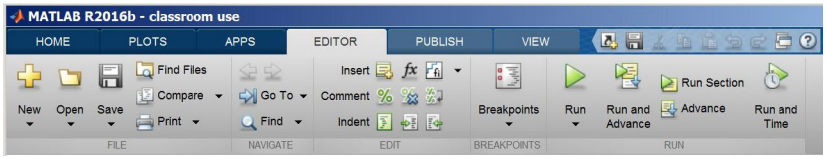
a) Kontextmenü der Datei `quadrGlScr.m` öffnen und den Befehl Run wählen.

b) Die Datei `quadrGlScr.m` im Current Folder mit der Maus selektieren und dann in das Command-Window ziehen.

c) Im Command-Window `quadrGlScr` eingeben.

d) Den Run-Button im Editor-Tab des Toolstrips anklicken. Hierzu muss das Skript im Editor geladen sein.

Starten Sie das Skript mit allen vier Varianten.

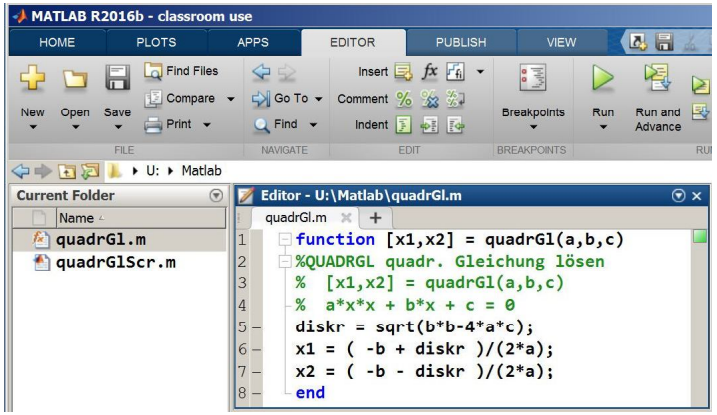


Beachten Sie, dass ein Skript Zugriff auf die Variablen im Workspace hat. Es können neue Variablen erzeugt oder existierende Variablen überschrieben werden. Verwenden Sie den `clear`-Befehl um sich davon zu überzeugen. Der Befehl `clear` löscht alle vorhandenen Variablen aus dem MATLAB-Workspace.

Aufgabe :

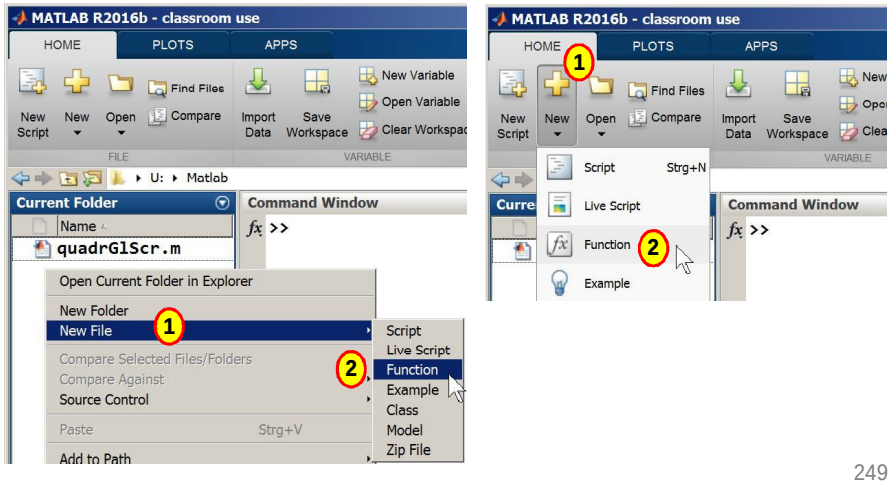
Erstellen Sie eine Funktion `quadrGl` zur Lösung einer quadratischen Gleichung der Form $a*x^2+b*x+c=0$

An die Funktion werden die drei Koeffizienten der quadratischen Gleichung als Parameter übergeben. Als Ergebnis werden die beiden Lösungen der Gleichung zurückgegeben. Was passiert bei komplexen Lösungen ?



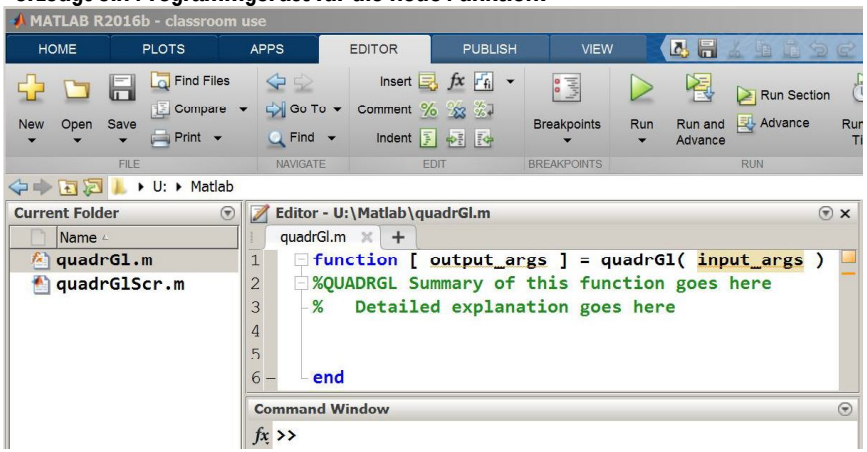
Teilaufgaben :

1) Erzeugen Sie eine neue Datei mit Namen `quadrGl.m` (Typ Function) - entweder das Kontextmenü im Fenster „Current Folder“ aktivieren und Function auswählen (links) oder über den Toolstrip New -> Function (rechts).



Teilaufgaben :

2) Ändern Sie den Namen der Datei von `Untitled.m` auf `quadrGl.m`, wenn Sie die Funktion über das Fenster „Current Folder“ erzeugt haben. MATLAB erzeugt ein Programmgerüst für die neue Funktion.



3) Programmieren Sie die Funktion `quadGl.m` .

Teilaufgaben :

4) Testen Sie ihre Funktion für verschiedene Werte von a, b und c. Die Funktion kann auch komplexe Lösungen berechnen! Geben Sie den Hilfe-Text für die Funktion aus.

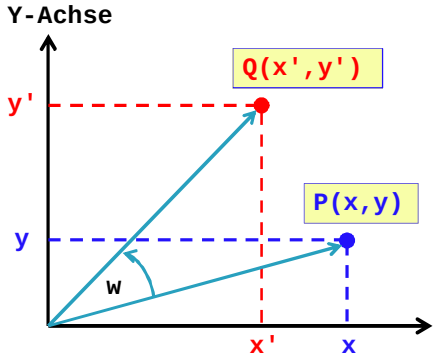
5) Was passiert, wenn Sie die Funktion mit zu wenig oder zu vielen Parametern aufrufen?

```
Command Window
>> [x1,x2]=quadrGl(2,6,3)
x1 =
   -0.6340
x2 =
   -2.3660
>> [y1,y2]=quadrGl(2,1,3)
y1 =
  -0.2500 + 1.1990i
y2 =
  -0.2500 - 1.1990i
>> z1=quadrGl(2,7,3)
z1 =
   -0.5000
>> help quadrGl
 quadrGl quad. Gleichung lösen
    [x1,x2] = quadrGl(a,b,c)
    a*x*x + b*x + c = 0
```

Aufruf der Funktion

Was ist der Unterscheid zwischen diesen beiden Aufrufen ?

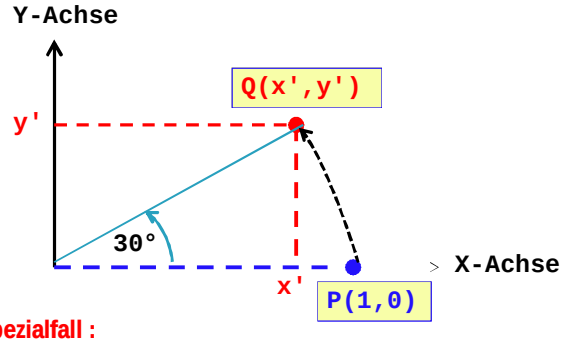
```
[x1,x2] = quadrGl(2,6,3)
[x1,x2] = quadrGl(2,6,3);
```

Eine Drehung in der Ebene kann durch eine 2*2-Matrix beschrieben werden. Die Drehmatrix gibt an, wie sich die neuen Koordinaten (x',y') aus den ursprünglichen Koordinaten (x,y) berechnen.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(w) & -\sin(w) \\ \sin(w) & \cos(w) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(w)\cdot x - \sin(w)\cdot y \\ \sin(w)\cdot x + \cos(w)\cdot y \end{pmatrix}$$

Das Koordinatensystem ist fest. Der Punkt P mit den Koordinaten (x,y) wird um den Winkel w um den Ursprung gedreht. Die Koordinaten (x',y') des gedrehten Punktes berechnen sich nach der obigen Formel.



Spezialfall :

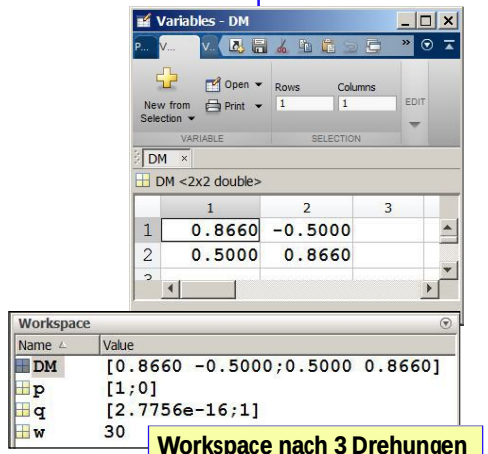
P liegt auf der x-Achse und wird um 30° gedreht : `w = 30°` `P(x=1,y=0)`

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30) & -\sin(30) \\ \sin(30) & \cos(30) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -0.5 \\ 0.5 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Wird der Punkt P dreimal um jeweils 30° gedreht, dann liegt der gedrehte Punkt auf der y-Achse, d.h. er besitzt die Koordinaten `(0,1)` .


```
Command Window
>> w = 30
w =
    30
>> DM = [cosd(w),-sind(w); sind(w),cosd(w)]
DM =
    0.8660   -0.5000
    0.5000    0.8660
>> p = [1; 0]
p =
     1
     0
>> q = DM * p
q =
    0.8660
    0.5000
>> q = DM^3*p
q =
    0.0000
    1.0000
```

`sin` : Winkel im Bogenmaß angeben
`sind` : Winkel im Gradmaß angeben



Workspace nach 3 Drehungen

Die Befehle zur Berechnung der Koordinaten eines Punktes nach einer Drehung werden in einem Skript gespeichert werden. Dann müssen die Befehle nicht immer per Hand eingegeben werden.

Aufgabe :

1) Erstellen Sie im Verzeichnis `U:\matlab` das Skript `drehung.m` .

2) Schreiben Sie das Skript und führen Sie es aus.

Editor - U:\Matlab\prakt1\drehung.m

drehung.m

```
1  clear
2  % Berechne Koordinaten des Punktes P=(1,0),
3  % wenn er um den Winkel w gedreht wird.
4  format compact
5  w = 30
6  p = [1; 0]
7  DM = [cosd(w), -sind(w); sind(w),cosd(w)]
8  q = DM*p
9  q = DM^3*p
10 E1 = DM^12
```

3) Die Variablen, die im Skript verwendet werden, sind auch im Workspace verfügbar. Deshalb können Sie die Matrix `DM` und die Vektoren p und q einfach im Command-Fenster weiter verwenden.

4) Führen Sie die Drehung dreimal durch. Hierzu können Sie auch den Operator `^` verwenden.

5) Wie oft muss man die Matrix `DM` mit sich selbst multiplizieren, um die Einheitsmatrix zu erhalten?

6) Ändern Sie den Drehwinkel auf 60° und 90°. Führen Sie dann ein paar typische Drehungen durch.

7) Ändern Sie das Skript aus 2 wie folgt :

Editor - U:\Matlab\prakt1\drehung1.m

drehung1.m

```
1  clear
2  % Berechne Koordinaten des Punktes p=(1,0),
3  % der um den Winkel w gedreht wird.
4  format compact
5  w = 30
6  p = [1; 0]
7  DM1 = drehmatrix(w)
8  q = DM1*p
9  q1 = drehmatrix(60)*drehmatrix(30)*p
10 q2 = drehmatrix(-60)*drehmatrix(60)*p
```

Schreiben Sie eine Funktion `drehmatrix`, an die ein Winkel w übergeben wird und die dann die zugehörige Drehmatrix zurückgibt.

```
>> drehung.m
w =
    30
p =
     1
     0
DM =
    0.8660   -0.5000
    0.5000    0.8660
q =
    0.8660
    0.5000
q =
    0.0000
    1.0000
ans =
    1.0000    0.0000
   -0.0000    1.0000
>> q1 = DM*DM*p
q1 =
    0.5000
    0.8660
>> q2 = DM * q1
q2 =
    0.0000
    1.0000
>> DM^6
ans =
   -1.0000   -0.0000
```

`help`	Help : kurzen Hilfetext im Command-Window anzeigen

`help sin`
`help pi`
`help matlab\elfun`
`help datatypes`
`help help`
`help doc`
`help Operator`
	Informationen zum Befehl `sin` anzeigen
	Informationen zur Variablen `pi` anzeigen

`doc`	ausführliche Informationen im Help-Browser anzeigen
`doc sin` `doc pi`	
`helpbrowser`	Help-Browser öffnen
`lookfor`	Suche in allen M-Files nach einem vorgegebenen Stichwort
`lookfor Bessel`	
`docsearch`	Help-Browser Search öffnen
`which`	Suche nach Funktionen und Dateien
`which ode45`	Wo ist die Funktion `ode45` definiert ?

`who`	Variablen im aktuellen Workspace anzeigen
`who a b x` `who a*`	
`whos`	wie `who` , aber ausführliche Informationen (size, type)
`clear`	Variablen und Funktionen aus dem Workspace löschen

`clear`
`clear variables`
`clear a b`
`clear all`
	alle Variablen im Workspace löschen
	gleiche Wirkung wie `clear`
	Variablen `a` und `b` aus dem Workspace löschen
	Alle Variablen, Funktionen, globale Variablen löschen

`clc`	Command-Window löschen
`pwd`	Current Folder anzeigen (print working directory)
`cd`	Current Folder anzeigen, ändern

`cd`
`cd u:\matlab`
`cd ..`
	Gleiche Wirkung wie `pwd`
	`U:\matlab` als Current Folder setzen
	Elternverzeichnis als Current Folder setzen

`ls`	Inhalt des Current Folder anzeigen
`dir`	Inhalt des Current Folder anzeigen

1. Installieren Sie MATLAB auf ihrem Rechner. Wiederholen Sie alle Übungen der ersten Praktikumsstunde noch einmal.
2. Berechnen Sie die Ergebnisse der folgenden Multiplikationen auf einem Blatt Papier und mit Hilfe von MATLAB. Erstellen Sie jeweils ein geeignetes Skript.

a)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$A1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Differenz A1 – A2 mit Hilfe vom MATLAB. Verwenden Sie geeignete Hilfsvariablen, damit die Lösung möglichst einfach wird. Warum ist die Differenz nicht 0 ?

c)
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Berechnen Sie das Produkt der beiden Drehmatrizen A und B und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Drehmatrix C. Führen Sie die Rechnungen zuerst auf einem Blatt Papier durch. Versuchen Sie zu beweisen, dass stets gilt C=A*B. Was bedeutet das anschaulich?

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

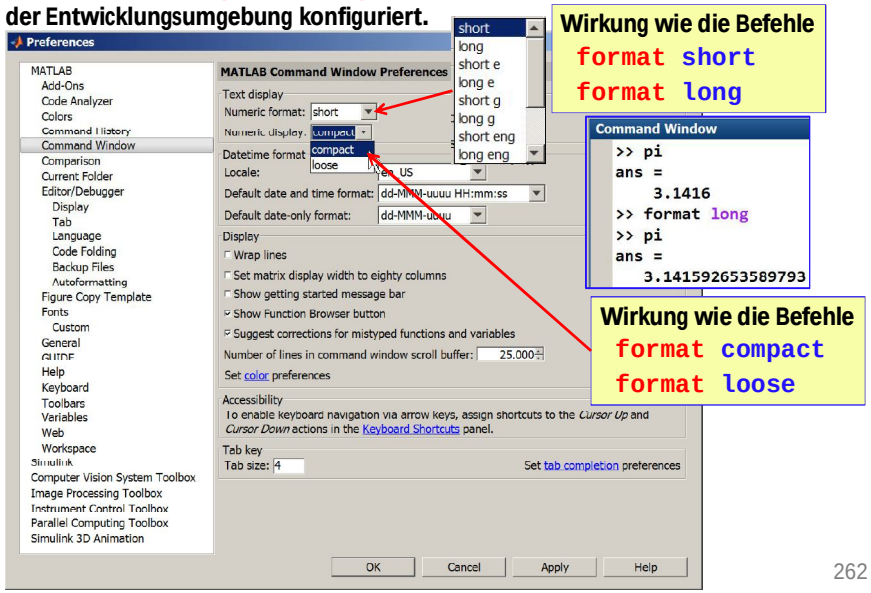
$$C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

Führen Sie dann die Rechnungen mit MATLAB durch, wobei folgende Werte verwendet werden sollen : φ=30° und ψ=60° . Verwenden Sie hierzu wieder die Hilfsfunktion `drehmatrix` aus Kapitel 1.7.

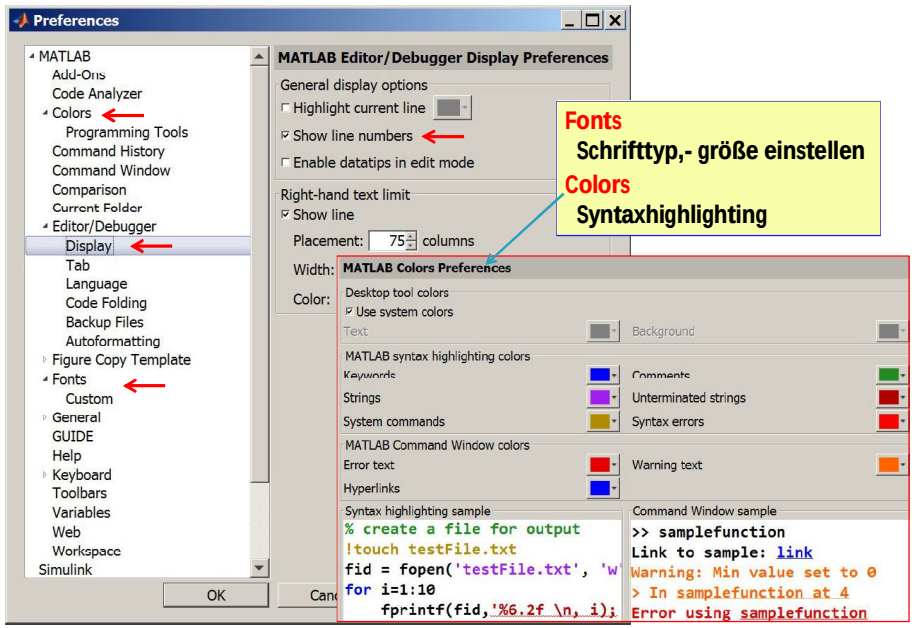
Termin 2 : Ein- und Ausgabe – Funktionen zeichnen

1 Einstellungen

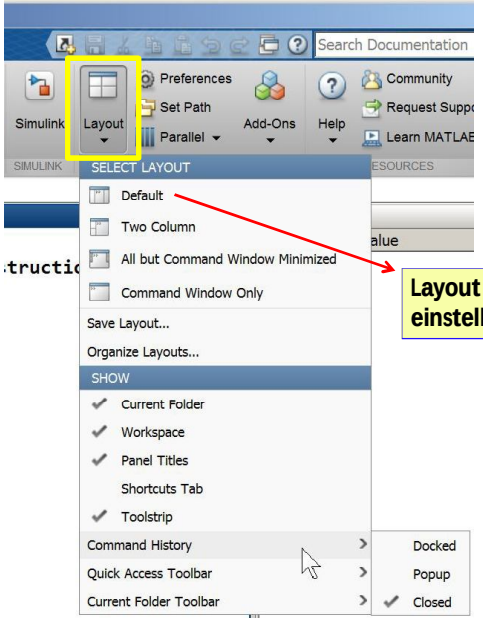
Über den Tab Home (Environment)->Preferences werden Aussehen und Verhalten der Entwicklungsumgebung konfiguriert.



1 Einstellungen



1 Einstellungen

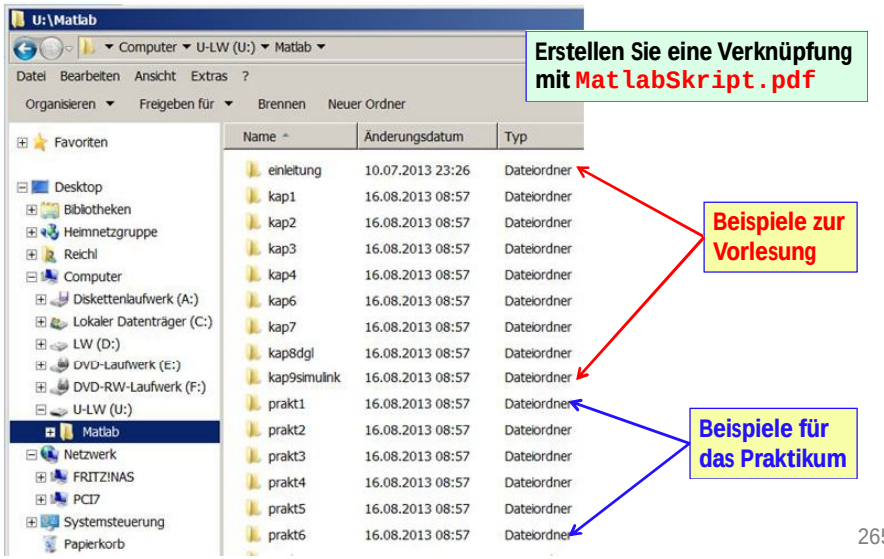


Tab Home -> Layout :

- **Auswahl der Teilfenster, die in der MATLAB-IDE angezeigt werden**
- **Anordnung der Teilfenster wählen**
- **Toolstrip konfigurieren**

2 MATLAB-Beispiele kopieren

Kopieren Sie von `X:\Dozenten\Ingenieurinformatik\Matlab\Beispiele` die Verzeichnisse `kap1-9`, `prakt1-6` in das Verzeichnis `U:\matlab`.



Termin 2 : Ein- und Ausgabe – Funktionen zeichnen

3 Ein- und Ausgabe

In der Programmiersprache C erfolgt die Ein- und Ausgabe mit Hilfe der Funktionen scanf und printf.

```
scanf("%d", &k);        printf("X-Wert = %10.4f", x);
```

Bei MATLAB gibt es ähnliche Funktionen um Werte einzulesen und um Informationen (Text, Werte von Variablen) auszugeben. Standardmäßig werden Werte über das Command-Window eingelesen und Ausgaben in das Command-Window geschrieben. Die wichtigsten Befehle zur Ein- und Ausgabe :

`disp`	Text oder Variablen ausgeben – Formatierung begrenzt möglich
`format`	globale Ausgabeformate festlegen
`fprintf`	Text und Variablen in das Command-Window ausgeben oder in eine Datei schreiben – Formatierung erfolgt über Formatelemente analog zur Programmiersprache C
`fscanf`	Daten aus dem Command-Window oder einer Datei einlesen – Formatierung erfolgt wieder über Formatelemente
`input`	Werte aus dem Command-Window einlesen

Beachte :

Weil bei MATLAB alle Variablen Matrizen sind, gibt es einige wichtige Unterschiede zwischen den Funktionen `printf/scanf` in der Programmiersprache C und den Funktionen `fscanf/fprintf` bei MATLAB.

3.1 Ausgabe mit disp und format

Mit dem Befehl `disp` (display) wird der Wert einer Variablen (allgemeiner eines Ausdrucks) in das Command-Window geschrieben. Der Name der Variablen wird dabei nicht ausgegeben (Unterschied zur Eingabe des Variablennamens).

```
Command Window
>> kreis
Radius:
    5.2000
Umfang:
   32.6726
>> format long
>> kreis
Radius:
   5.200000000000000
Umfang:
  32.672563597333848
>> format shorte
>> kreis
Radius:
   5.2000e+00
Umfang:
   3.2673e+01
```

Den Befehl `disp` verwendet man meist in Skripten oder Funktionen, nur selten im Command-Window. Mit dem Befehl `format` wird die Darstellung der Ausgabe grob gesteuert.

```
Editor - U:\Matlab\kreis.m
kreis.m
1 –  r=5.2;
2 –  disp('Radius:')
3 –  disp(r)
4 –  u=2*pi*r;
5 –  disp('Umfang:')
6 –  disp(u)
```

String 'Umfang:' ausgeben
Einfache Hochkommas!

```
format compact
format loose
format short
format long
format shorte
format longe
format shortg
format longg
format hex
help format
```

Beachte : `format` ändert nur das Ausgabeformat. Intern wird der Wert stets gleich gespeichert.

3.2 Ausgabe mit dem Befehl `fprintf`

Die formatierte Ausgabe von Variablen erfolgt mit der Funktion `fprintf`. Diese Funktion arbeitet ähnlich wie die Funktion `printf` in der Programmiersprache C.

`fprintf( Formatstring , Variablen )`

Datentyp	Formatelement	Bemerkung
Integer, signed	%d or %i	Base 10
Integer, unsigned	%u %x %X	Base 10 Base 16 (hexadecimal), lowercase letters a–f Same as %x, uppercase letters A–F
Floating-point number	%f %e %E	Fixed-point notation Exponential notation, such as 3.141593e+00 Same as %e, but uppercase, such as 3.141593E+00
Characters	%c %s	Single character String of characters, z.B. 'Hallo'

```
> x=13.67;
> fprintf('x=%f\n', x)
x=13.670000
> fprintf('x=%d\n', x)
x=1.367000e+01
> fprintf('x=%e\n', x)
x=1.367000e+01
```

```
> x=101;
> fprintf('x=%f\n', x)
x=101.000000
> fprintf('x=%d\n', x)
x=101
> fprintf('x=%e\n', x)
x=1.010000e+02
```

%d oder %i ist auch bei Gleitkommazahlen möglich!

3.2 Ausgabe mit dem Befehl `fprintf`

Feldweite und Genauigkeit :

Bei Formatelementen für Gleitkommavariablen kann man die Feldweite (d.h. die Anzahl der Spalten, die für die Ausgabe reserviert werden) festlegen und die Anzahl der Nachkommastellen.

Beispiele :

```
fprintf('Wert=%10.3f',x)
  Wert=___789.123
```

```
fprintf('Wert=%8d',k)
  Wert=__123123
```

```
>> x=13.67;
>> fprintf('x=%.0f\n', x)
x=14
>> fprintf('x=%.1f\n', x)
x=13.7
>> fprintf('x=%5.1f\n', x)
x= 13.7
>> fprintf('x=%6.1f\n', x)
x=  13.7
>> fprintf('x=%6.2f\n', x)
x= 13.67
```


3.2 Ausgabe mit dem Befehl `fprintf`

Aufgabe 1 : Vektoren und Matrizen als Variablen in `fprintf`

Untersuchen Sie das Verhalten von `fprintf`, wenn ein Vektor oder eine Matrix als Variable verwendet wird. Wie lauten die Regeln für die Ausgabe?
Führen Sie die folgenden Befehle aus :

1
```
>x = [ 3 5 7 9 ];
>fprintf('x=%f\n',x)
>fprintf('%f %f\n',x)
>fprintf('%f %f %f %f\n',x)
>fprintf('%f %f\n%f %f\n',x)
>x = [3; 5; 7; 9];
>fprintf('x=%f %f\n',x)
>fprintf('%f %f\n',x(2),x(4))
>fprintf('%f %f',x(2),x(4))
```

2
```
>A = [ 1 2 ; 3 4 ]
>fprintf('%f\n',A)
>fprintf('%f %f\n',A)
>fprintf('%f %f\n',A')
>fprintf('%f %f\n',A(1,:))
>fprintf('%f %f\n',A(:,1))
>fprintf('%f\n%f\n',A(:,1))
>fprintf('%f\n',A(:,1))
>fprintf('%f %f\n',A(:))
```

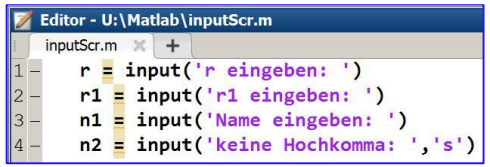
3
```
>fprintf('%f\n%f\n',A(1,:))
>fprintf('%f %f\n',A(1,1),A(2,2))
>fprintf('%f',A)
```

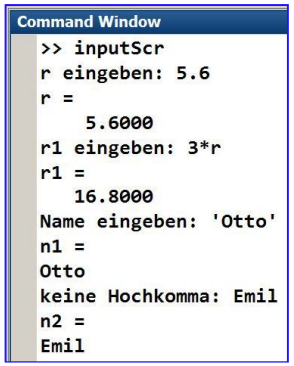

3.3 Einlesen mit dem Befehl `input`

Mit der Funktion `input` lässt sich sehr einfach eine Eingabeaufforderung programmieren. `input` gibt einen Text aus und wartet dann auf die Eingabe. Diese wird als Rückgabewert der Funktion input der linken Seite zugewiesen. Die Funktion `input` kann Zahlenwerte und Text (Strings) einlesen.

`variable = input('Text für Eingabeaufforderung')`

Beispiel :





Der zweite Parameter beim Aufruf von input (`'s'`) bewirkt, dass die Funktion `input` die Eingabe als String interpretiert. Wird dieser Parameter weggelassen, dann muss alternativ die Eingabe des Strings mit einfachen Hochkommas erfolgen.

3.4 Aufgabe

Aufgabe 2 :

Das Skript `drehung` im Verzeichnis `prakt2` berechnet die neuen Koordinaten eines bestimmten Punktes, der um 30° gedreht wird. Öffnen Sie das Skript und ändern Sie es so ab, dass die X-Y-Koordinaten des Punktes eingelesen werden, ebenso der Drehwinkel. Die Koordinaten des Ausgangspunktes, die Drehmatrix und die Koordinaten des gedrehten Punktes werden mit 3 Nachkommastellen ausgegeben (siehe Beispiel).

```
Command Window
>> drehung_lsg
Drehung in der Ebene
Drehwinkel in Grad: 35
X-Koordinate eingeben: 1
Y-Koordinate eingeben: 1.5
Drehwinkel w=35.000
Drehmatrix :
  0.819  -0.574
  0.574   0.819
Ausgangspunkt    P(1.000,1.500)
Gedrehter Punkt Q(-0.041,1.802)
Abstand Ausgangspunkt    : 1.802776
Abstand gedrehter Punkt : 1.802776
```

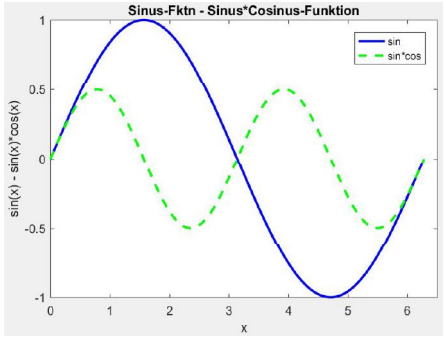
Eingaben

Berechnen Sie den Abstand des Ausgangspunktes vom Ursprung und den Abstand des gedrehten Punktes vom Ursprung. Geben Sie den Abstand jeweils auf 6 Nachkommastellen aus.

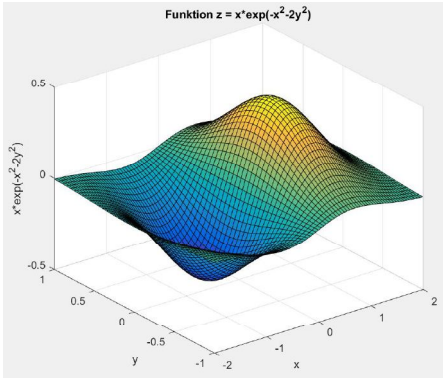
Wie kann man aus den Koordinaten des gedrehten Punktes und des Ausgangspunktes den Drehwinkel berechnen?

4 Funktionen graphisch darstellen

Mit MATLAB lassen sich einfach 2- und 3-dimensionale Graphiken erstellen



2D-Graphik



3D-Graphik

Teilaufgaben

- **Mathematischer Anteil** – Funktion, Daten
- **Darstellung** – Linientyp, Farbe, Beschriftung der Achsen, Überschrift, Strichstärke, Legende
- **Ausgabe der Graphik** – Graphikformate (`.jpg`, `.tiff`, `.bmp`), Speichern und Laden von Graphiken mit Hilfe von MATLAB-Figure-Dateien

4.1 plot-Befehl

Die Funktion `plot(x,y)` zeichnet die Werte von y über x, d.h. die Punkte `(x(k),y(k))` für alle Werte von k. Die beiden Vektoren x und y müssen die gleiche Länge besitzen. Wird der Vektor x weggelassen (d.h. `plot(y)`) werden die Werte von y über dem Index gezeichnet, d.h. die Punkte `(k,y(k))`. Die Punkte werden standardmäßig mit geraden Linien verbunden.

Der `plot`-Befehl stellt die Zeichnung in einem eigenen Fenster mit dem Titel „Figure 1“ dar (Graphik-Fenster). Die Zeichnung kann anschließend mit weiteren Befehlen bearbeitet werden, z.B. Beschriftung der Achsen. Durch die erneute Eingabe eines `plot`-Befehls wird die Graphik im aktuellen Graphikfenster gelöscht und es wird eine neue Graphik gezeichnet.

Aufgabe 3 :

Erstelle ein Skript `plotbefehl.m`, das die Kurve `y = sin(x)` im Intervall `[0, 2π]` zeichnet

```
x = 0:pi/100:2*pi;
y = sin(x);
plot(x,y)
```

Beachte : der Vektor x ist ein Zeilenvektor!

Ersetzen Sie den Befehl `plot(x,y)` durch `plot(y)`. Was ist der Unterschied zwischen den beiden Befehlen? Zeichnen Sie danach die Funktion $y = x^2 * \sin(x)$. Wie lautet der Befehl um die y-Werte zu berechnen?

4.1 plot-Befehl

Das Skript `plotbefehl.m` wird so abgeändert, dass zwei Kurven in einer Zeichnung dargestellt werden. Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten :

a) Die Funktion `plot(x1,y1,x2,y2)` zeichnet die Werte von `y1` über `x1` und die Werte von `y2` über `x2`.

b) Erzeuge eine Matrix Y mit zwei Zeilen. `plot(x,Y)` zeichnet zuerst Zeile 1 der Matrix Y über x und dann Zeile 2 von Y über x. Der Vektor x und die Matrix Y müssen gleich viele Spalten besitzen.

c) Zeichne mit Hilfe des `plot`-Befehls die erste Kurve. Danach wird der Befehl `hold on` eingegeben, der bewirkt, dass die nachfolgenden `plot`-Befehle die bereits bestehende Zeichnung verwenden und keine Neuzeichnung erfolgt. Dadurch werden mehrere Kurven in ein Graphik-Fenster gezeichnet. Mit dem Befehl `hold off` wird das Standardverhalten wiederhergestellt, d.h. `plot` initialisiert die Graphik jeweils wieder neu.

```
...
plot(x1,y1)
hold on
...
plot(x2,y2)
```

Aufgabe 4 :

Zeichnen Sie die Kurven `sin(x)` und `sin(x)*cos(x)` in ein Graphik-Fenster. Ändern Sie das Skript `plotbefehl` entsprechend ab. Probieren Sie alle drei Varianten aus.

4.2 Darstellung der Linien

Die Darstellung einer Kurve kann durch optionale Parameter des `plot`-Befehls geändert werden. Wichtigster Parameter ist die Line-Specification, ein String der die Darstellungsform einer Kurve mit Hilfe von 3 Werten (color, marker und line style) spezifiziert (siehe `help plot` und `doc plot`).

Color		Marker		Line Style	
b	blue	.	point	-	solid
g	green	o	circle	:	dotted
r	red	x	x-mark	-.	dashdot
c	cyan	+	plus	--	dashed
m	magenta	*	star	(none)	no line
y	yellow	s	square		
k	black	d	diamond		
w	white	v	triangle (down)		
		^	triangle (up)		
		<	triangle (left)		
		>	triangle (right)		
		p	pentagram		
		h	hexagram		

kein Marker

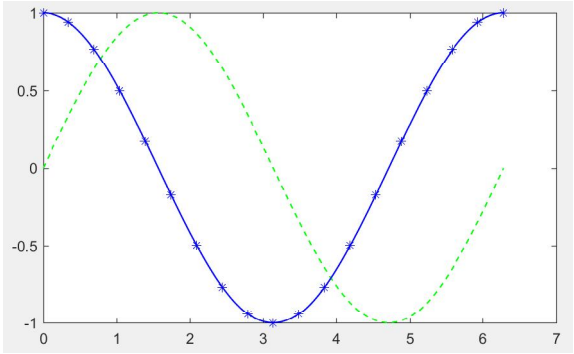
```
plot(x,y, 'g*--')                plot(x,y, 'r+')
plot(x,y1, 'g*--', x,y2, 'r+')   plot(x,y, 'b-.')
```


4.2 Darstellung der Linien

Aufgabe 5 :

Zeichnen Sie die Kurven `sin(x)` und `cos(x)` in eine Graphik. Die Sinus-Kurve soll grün und gestrichelt gezeichnet werden. Die Cosinus-Funktion wird blau dargestellt mit ' Line Style solid '. Einzelne Punkte auf der blauen Kurve werden durch einen * (star) gekennzeichnet. Der Abstand dieser Punkte auf der x-Achse soll jeweils 20° betragen.

Schreiben Sie die entsprechenden Befehle in das Skript `plotbefehl.m`.



4.3 Konfiguration – PropertyName - PropertyValue

Die Darstellung von Graphiken kann auch über PropertyName-PropertyValue-Paare modifiziert werden. PropertyName ist ein String, der eine bestimmte Eigenschaft einer Graphik bezeichnet. Für die Strichstärke einer Kurve lautet der PropertyName `'LineWidth'`. Durch die Angabe eines PropertyValues wird für die entsprechende Property ein bestimmter Wert gesetzt, der dann bei der Darstellung verwendet wird. Der Datentyp des PropertyValues hängt von der Property ab. Für die Property `'LineWidth'` ist der Datentyp des PropertyValues `double`. Die PropertyName-PropertyValue-Paare folgen im plot-Befehl auf die Daten, wenn keine Line-Specification verwendet wird oder Sie werden nach der Line-Specification angegeben. Es dürfen mehrere Property-Name-PropertyValue-Paare verwendet werden.

Beispiele :

`plot(x,y,'LineWidth',2)`
Property `LineWidth` (Strichstärke) bekommt den Wert 2

`plot(x,y,'c–','LineWidth',2)`
Setze eine Line-Specification und ein PropertyName/Value-Element

`plot(x,y,'Color',[0.9,0,0],'LineWidth',2)`
Property `Color` bekommt den RGB-Wert `[0.9,0,0]`,
Property `LineWidth` den Wert 2, siehe `doc ColorSpec`

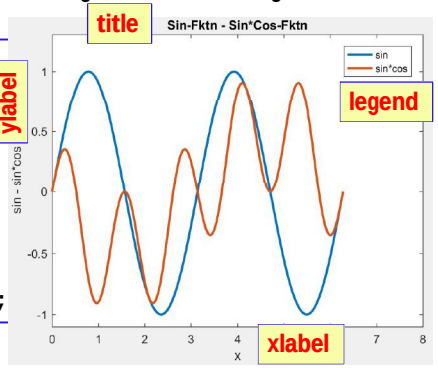
4.4 Beschriftung und Skalierung

Nach der Eingabe des plot-Befehls muss eine Graphik beschriftet werden.

`title('Titel der Zeichnung')`	
`xlabel('x-Achse')`	Beschriftung der x-Achse, analog y und z
`legend('sin','cos')`	Welche Kurve ist welche?
`xlim([0 8])`	X-Achse von 0 bis 8, analog y und z
`axis([0 8 -1 2])`	X-Achse von 0 bis 8, Y-Achse von -1 bis 2
`axis equal`	X- und Y-Achse mit gleichem Maßstab
`axis on/off`	Achsen werden gezeichnet / nicht gezeichnet
`grid on/off`	Gitterlinien an/aus

```
x = 0:pi/100:2*pi;
w1 = 2.0; w2=3.0;
y1 = sin(w1*x);
y2 = cos(w2*x).*sin(w1*x);
plot(x,y1,x,y2,'LineWidth',2)
xlabel('x')
ylabel('sin(x) - sin(x)*cos(x)')
axis([0 8 -1.1 1.3])
legend('sin','sin*cos')
title('Sin-Fktn - Sin*Cos-Fktn');
```

plotsincos.m



Mit dem Befehl

```
subplot( m, n, p )
```

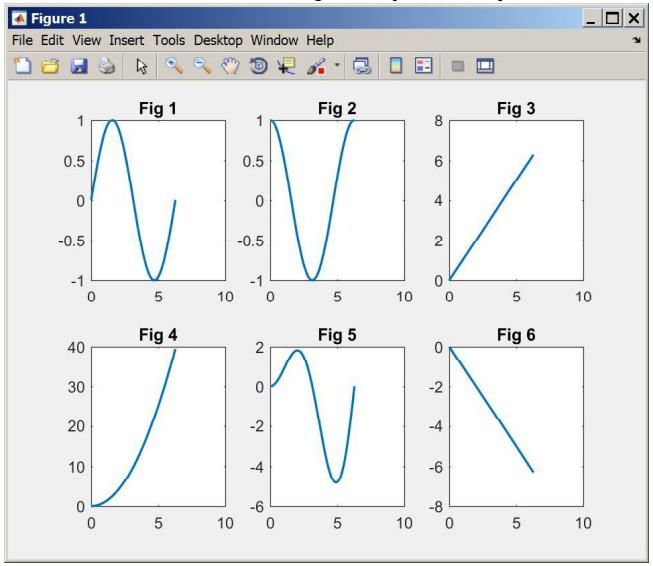
wird ein Fenster in m*n kleinere Teilfenster zerlegt. Damit lassen sich mehrere Plots (Subplots) neben- und untereinander in einem Graphik-Fenster darstellen. Die Subplots werden zeilenweise durchnummeriert, beginnend bei 1. Der dritte Parameter des Befehls `subplot` (hier p) gibt an, auf welchen Subplot die nachfolgenden Befehle angewendet werden, d.h. p wählt den „aktuellen“ Subplot aus. Häufige Anwendung : 3D-Plots mit verschiedenen Ansichten.

Beispiel :

```
x = 0:pi/100:2*pi;
subplot(2,3,1);  plot(x, sin(x));    title('Fig 1');
subplot(2,3,2);  plot(x, cos(x));    title('Fig 2');
subplot(2,3,3);  plot(x, x);         title('Fig 3');
subplot(2,3,4);  plot(x, x.*x);      title('Fig 4');
subplot(2,3,6);  plot(x, -x);        title('Fig 6');
subplot(2,3,5);  plot(x, x.*sin(x)); title('Fig 5');
```

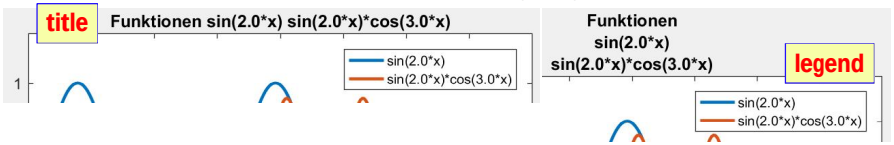
`plotsubplot.m`

Aufgabe 6 : Versuchen Sie das Programm `plotsubplot.m` zu verstehen.



Hausaufgabe :

Ändern Sie das Skript `plotsincos` so, dass in der Legende und im Titel automatisch die aktuellen Werte von `w1` und `w2` angezeigt werden, z.B.



Dieses Problem wird mit dem Befehl `sprintf` gelöst. Der Befehl arbeitet wie `fprintf`. Das Ergebnis wird aber in eine Stringvariable geschrieben. Beispiel :

```
f1 = sprintf('sin(%.1f*x)', w1)
```

Besitzt `w1` den Wert `2.3`, dann wird folgender String erzeugt : `'sin(2.3*x)'`

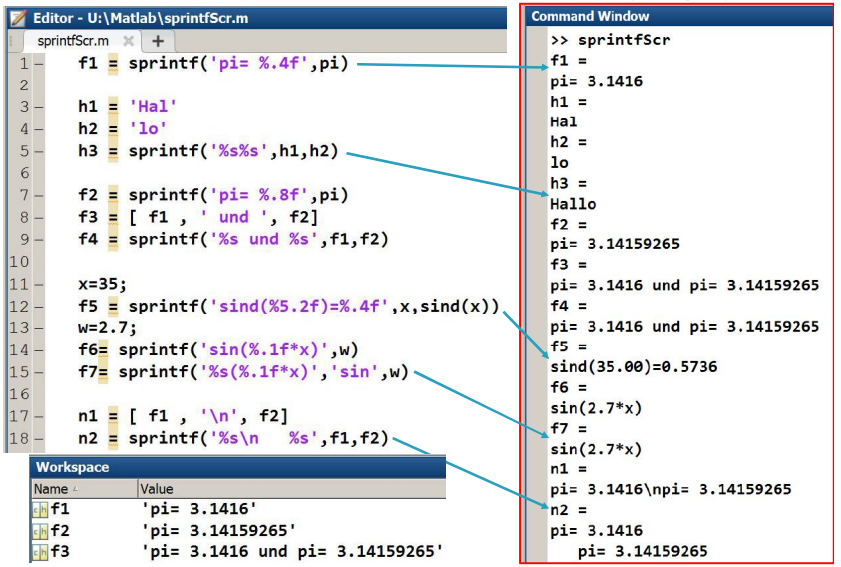
Der String `f1` kann z.B. im Befehl `legend` als Parameter verwendet werden :

```
legend(f1, f2)  statt  legend('sin', 'sin*cos')
```

Das Formatelement %s wird verwendet, um eine Stringvariable mit sprintf zu verarbeiten. In einfachen Fällen kann auch der Concatenation-Operator `[]` verwendet werden.

```
titlestr = sprintf('Funktionen %s %s', f1, f2 )
titlestr = [ 'Funktionen ', f1, f2 ]
```


Versuchen Sie zunächst mit einfachen Beispielen den Befehl `sprintf` zu verstehen. Danach können Sie dann die Befehle für title und legend programmieren.



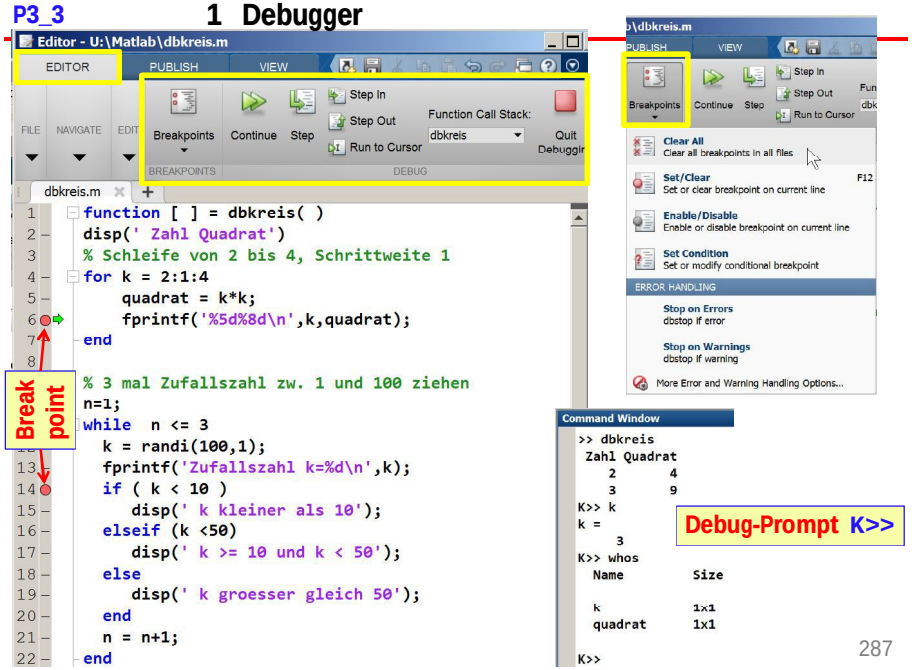
Die MATLAB IDE besitzt einen integrierten Debugger um Funktionen und Skripte während der Laufzeit zu analysieren. Ein Debugger dient dazu Fehler zu finden, das korrekte Verhalten von Programmen zu überprüfen und fremde Programme besser zu verstehen.

Wichtige Elemente eines Debuggers :

- Breakpoint (Haltepunkt): eine speziell markierte Zeile im Programm, an der das Programm angehalten wird, wenn es zur Laufzeit diese Zeile erreicht
- Einzelschrittverarbeitung mit Step, Step in, Step out und Continue
- Aktuelle Werte von Variablen anzeigen und ändern

Schritte bei der Anwendung des Debuggers :

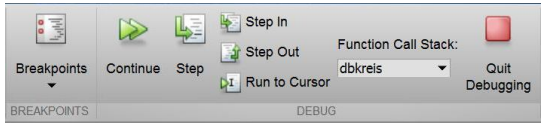
1. Setze einen oder mehrere Breakpoints an wichtigen Stellen einer Funktion oder eines Skripts.
2. Starte dann das Programm. Wenn das Programm auf einen Breakpoint läuft, wird die Programmausführung angehalten. Im Command-Window erscheint der Debug-Prompt K>>
3. Anschließend gibt man MATLAB-Befehle im Command-Window ein, die z.B. Werte von Variablen anzeigen oder verändern. Häufiger verwendet man hierzu aber das Workspace-Fenster oder den Variable-Editor .



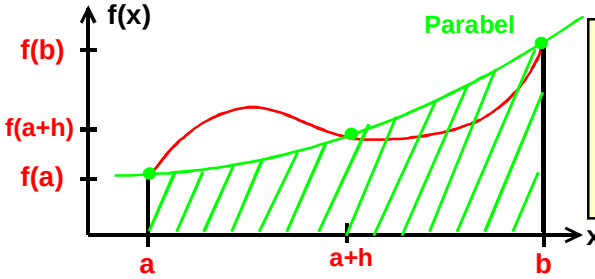
Aufgabe 1

Um den Umgang mit dem Debugger zu üben werden die beiden Funktionen `dbkreis.m` und `dbflaeche.m` im Verzeichnis `\prakt3` verwendet.

1. Starten Sie die Funktion `dbkreis` und versuchen Sie das Programm zu verstehen. Es werden Schleifen (`for`, `while`) und `if-else`-Anweisungen verwendet. Versuchen Sie diese Kontrollstrukturen zu verstehen.
2. Setzen Sie in den Zeilen mit der for- und der while-Schleife jeweils einen Breakpoint und starten Sie das Programm erneut. Welche Variablen sind im Workspace vorhanden? Welche Werte besitzen diese Variablen? Gehen Sie dann Zeile für Zeile (Step) durch das Programm.



3. Probieren Sie die Befehle Step und Step in beim Aufruf der Funktionen `dbumfang` und `dbflaeche` aus. Was ist der Unterschied?
4. Deaktivieren Sie alle Breakpoints und starten Sie das Programm erneut.



Simpsonverfahren
Ersetze den Integranden durch eine Parabel, die durch 3 Punkte auf der Kurve geht. Eine Parabel besitzt 3 freie Parameter.

Fläche unter der Parabel : $F = \frac{h}{3} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f(a+h) + f(b) \right)$ $\quad h = (b-a)/2$

Teilt man das Intervall [a,b] in n (n gerade) Teilintervalle auf und wendet auf je zwei benachbarte Intervalle die obige Formel an, dann ergibt sich folgende Näherungsformel für das Integral (siehe z.B. Wikipedia) :

$$F = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \ldots + 4f(a+(n-1)h) + f(b)\right)$$

$h = (b-a)/n$

Fehlerabschätzung : $-\frac{1}{180} \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(x') \cdot (b-a) \quad , \quad a \le x' \le b$


```
double simpson(double a, double b, int n)
{
  double x, F, h;
  int i;
  h = (b-a)/n;
  F = exp(-a*a);
  x = a;
  for (i=1; i<n; i++)
  {
    x = x + h;
    if ( (i%2) == 1 )
      F = F + 4.0 * exp(-x*x);
    else
      F = F + 2.0 * exp(-x*x);
  }
  F = F + exp(-b*b);
  F = F*h/3.0;
  return F;
}
```

$$F = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \ldots + 4f(a+(n-1)h) + f(b))$$

Ein C-Programm, das den Wert des Integrals

$$F = \int_a^b e^{-x \cdot x} dx$$

mit Hilfe des Simpsonverfahrens berechnet.

Aufgabe 2

Erstellen Sie eine MATLAB-Funktion `simpson.m` , die das bestimmte Integral

$$F = \int_a^b e^{-x \cdot x} dx$$

zwischen den Grenzen a und b nach dem Simpsonverfahren berechnet. Als Vorlage verwenden Sie das entsprechende C-Programm.

Wie lautet das Ergebnis für das bestimmte Integral

$$\int_{0.5}^{2} e^{-x \cdot x} dx$$

wenn Sie für n die Werte 10, 100 und 1000 verwenden? Erstellen Sie dazu ein Skript. Testen Sie Ihr Programm auch mit dem Debugger.

```
Command Window
n=      10  y=  0.42078712
n=     100  y=  0.42080038
n=    1000  y=  0.42080038
```


Aufgabe 3

Das bisherige Integrationsprogramm kann nur den Wert des Integrals für eine ganz spezielle Funktion berechnen.
Ändern Sie die Funktion `simpson.m` so ab, dass man beliebige Funktionen integrieren kann. An die Funktion `simpson.m` muss zusätzlich ein Function-Handle übergeben werden.

```
function [y] = simpson( fun, a, b, n )
```

Testen Sie Ihr Programm, indem Sie die Funktionen `e^-x*x`, `sin(x)` und `sin(x)*cos(x)` im Intervall `[1,2]` integrieren.

Setzen Sie einen Breakpoint in der Funktion, die `y(x)= e^-x*x` berechnet und berechnen Sie dann das Integral.

```
Command Window
exp(-x*x)
n=      10  y=  0.135256035
n=     100  y=  0.135257258
n=    1000  y=  0.135257258
n=   10000  y=  0.135257258
n=  100000  y=  0.135257258
n= 1000000  y=  0.135257258
n=10000000  y=  0.135257258
sin
n=    1000  y=  0.956449142
sin*cos
n=    1000  y=  0.059374196
```

2 Numerische Integration

Aufgabe 4

Schreiben Sie ein Skript **gaussScr**, welches die Fläche unter der Glockenkurve im Bereich `[a,b]` berechnet:

$$F = \int_a^b e^{-k \cdot x \cdot x}\, dx$$

Einige Beispiele:
k = 1.0 a = -1.0 b = +1.0 → F = 1.4936
k = 1.0 a = -0.1 b = +0.1 → F = 0.1993
k = 2.0 a = -0.5 b = +0.5 → F = 0.8556
k = 1.0 a = -∞ b = +∞ → F = 1.7725

1. Der Anwender wird zunächst nach den Werten a, b, und k gefragt.
2. Dann erfolgt die numerische Berechnung des Integrals mittels `integral`.

integral Numerically evaluate integral.
Q = integral(FUN,A,B) approximates the integral of function FUN from A to B using global adaptive quadrature and default error tolerances.
FUN must be a function handle. A and B can be -Inf or Inf. If both are finite, they can be complex. If at least one is complex, integral approximates the path integral from A to B over a straight line path.
For scalar-valued problems the function Y = FUN(X) must accept a vector argument X and return a vector result Y, the integrand function evaluated at each element of X.

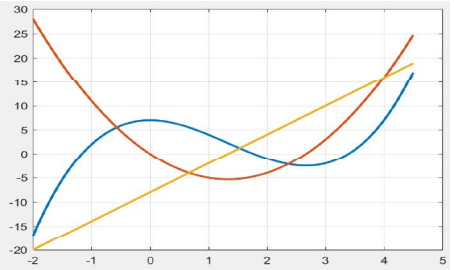
3. Zur Berechnung von $y(x) = e^{-k \cdot x \cdot x}$ muss zunächst eine MATLAB-Funktion geschrieben werden, zum Beispiel `function [y] = gauss(x)`, die dann an `integral` übergeben wird: `F = integral(@gauss, a, b)`
4. Tipp: Der Wert des Parameters k kann im Skript **gaussScr** in einer **globalen Variable** gespeichert werden, die dann von der Funktion **gauss** verwendet wird.

3 Kurvendiskussion

Aufgabe 5 :

Schreiben Sie in ein Skript `analysis.m` die Anweisungen zur Lösung der folgenden Aufgaben :

1. Stellen Sie die Funktion $y(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 + 7$ sowie deren erste und zweite Ableitung graphisch dar. Tipp: Zunächst einen Vektor mit x-Werten erstellen, anschließend den Vektor mit den y-Werten mittels `polyval` ausrechnen lassen.
2. Geben Sie eine Wertetabelle für das x-Intervall [0, 3] aus, Schrittweite 0.1
3. Bestimmen Sie die x-Koordinaten, an denen die Funktion Nullstellen oder Extrema besitzt. Tipp: Funktion `polyder` und `roots` verwenden.
4. Geben Sie die Koeffizienten der Stammfunktion aus.
5. Berechnen Sie das Integral der Funktion zwischen 1 und 3.
   Lösen Sie die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten :
   - mit der Funktion `polyint`
   - mit der Funktion `integral`.



3 Kurvendiskussion

Aufgabe 6 :

Schreiben Sie eine Funktion **getPolynomString**, an die ein Polynom übergeben wird (ein Vektor mit den Koeffizienten des Polynoms) und die das Polynom in einer Stringdarstellung zurückgibt. Die Koeffizienten des Polynoms werden jeweils mit einer Nachkommastelle ausgegeben. Anwendung : Beschriftung

Beispiele :

```
a=[4.1 3.7 -2.1 0.7]    -> 'y = 4.1*x^3+3.7*x^2-2.1*x+0.7'
a=[-4.1 3.7 -2.1 0.7]   -> 'y = -4.1*x^3+3.7*x^2-2.1*x+0.7'
a=[-4.1 0.0 0.0 0.7]    -> 'y = -4.1*x^3+0.0*x^2+0.0*x+0.7'
a=[-2.1 0.7]            -> 'y = -2.1*x+0.7'   'y = -2.1*x^1+0.7'
a=[0.7]                 -> 'y = 0.7'   'y = +0.7'
```

Hinweise :

Verwenden Sie die Funktion `sprintf` um zwei Strings aneinanderzufügen. Beispiel :

```
neu = sprintf('%s%s', 'abc', 'efg');
```

Hier wird aus den beiden Strings `'abc'` und `'efg'` der neue String `'abcefg'` erzeugt.
Analog kann mit folgendem Ausdruck

```
str = sprintf('%.1f*x^%.0f', 2.3, 4);
```

der String `'2.3*x^4'` erzeugt werden.
Erzeugen Sie die Stringdarstellung für das Polynom mit einer geeigneten Schleife.

Termin 4 : Gleichungssysteme, Eigenwerte, Eigenvektoren

4.1 Lineare Gleichungssysteme

A x b

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1

Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b. Das lineare Gleichungssystem `A*x = b` soll gelöst werden.
Ergänzen Sie das Skript `prakt4/a1LinGln.m`
mit den Lösungen der folgenden Aufgaben .

a) Definieren Sie die Matrix A und den Vektor b.
Geben Sie die Matrix A und den Vektor b mit einer Nachkommastelle aus.

b) Berechnen Sie die Determinante von A und geben Sie den Wert aus. Welche Aussage lässt sich daraus über die Lösung des Gleichungssystems machen? Besitzt das Gleichungssystem für jeden Vektor b eine eindeutige Lösung? Besitzt die Gleichung `A*x = 0` neben `x = 0` noch eine weitere Lösung?

c) Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe der Linksdivision und mit der Funktion `mldivide`. Gibt es einen Unterschied? Multiplizieren Sie die Lösung x mit der Matrix A und geben Sie das Ergebnis aus.

d) Berechnen Sie die inverse Matrix von A und geben Sie diese aus.

e) Zeigen Sie, dass MATLAB die inverse Matrix korrekt berechnet hat. Hierzu muss gelten $A^{-1}*A = E$. Geben Sie das Produkt $A^{-1}*A$ aus.

f) Lösen Sie dann das Gleichungssystem mit Hilfe der inversen Matrix. Geben Sie das Ergebnis aus.

4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Matrix A. Besitzt A vier linear unabhängige Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten?
Schreiben Sie die Lösungen für folgende Aufgaben in das Skript `prakt4/a2Eigenwert.m` .

a) Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB die Determinante, die Eigenvektoren und die Eigenwerte. Geben Sie die Ergebnisse aus.

b) Berechnen Sie das Produkt der 4 Eigenwerte mit einer for-Schleife. Welche Beziehung gilt ganz allgemein zwischen dem Produkt der Eigenwerte und der Determinante?

c) Zeigen Sie, dass der zweite Eigenvektor, der von MATLAB berechnet wird, tatsächlich ein Eigenvektor ist.
D.h. überprüfen Sie, ob folgende Beziehung gilt : $A \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2$
Hierbei ist v_2 der zweite Eigenvektor der Matrix A und λ_2 der zugehörige Eigenwert. Der Vektor v_2 besitzt 4 Komponenten – ein Spaltenvektor mit 4 Zeilen.

d) Die Eigenvektoren, die MATLAB berechnet sind orthogonal (stehen senkrecht aufeinander) und haben die Länge 1. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt von v_1 und v_2 Null ergibt, d.h. die beiden Vektoren sind orthogonal. Überprüfen Sie, dass der Vektor v_1 die Länge 1 besitzt. Wie kann die kartesische Länge eines Vektors berechnet werden? Geben Sie mindestens zwei verschiedene Lösungen an.

4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2:

e) Die Funktion `eig` berechnet die Eigenvektoren einer Matrix A und gibt diese in Form einer Matrix zurück – meist V genannt. Berechnen Sie die Ausdrücke
`V' * V` `V' * A * V`
und geben Sie diese aus. Können Sie die Ergebnisse vorhersagen? Erklären Sie die Ergebnisse (Hinweis Aufgabe d).

f) Zerlegen Sie den Vektor `b = [1;2;3;4]` nach Eigenvektoren von A.
Welchen Anteil hat der erste, der zweite, der dritte und der vierte Eigenvektor ?
D. h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und a_4 (Werte von Typ double) so, dass gilt :

$$a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 + a_4 \cdot \vec{v}_4 = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a_1 ist der Anteil des ersten Eigenvektors an b, a_2 der Anteil des zweiten Eigenvektors, ...

g) Wie lauten die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und a_4 , wenn b ein Eigenvektor ist, z.B. $b = v_1$? Versuchen Sie das Ergebnis durch Nachdenken zu finden. Berechnen Sie dann das Ergebnis mit Hilfe von MATLAB.

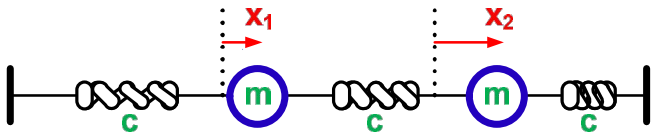
4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

```
Command Window
  Determinante von A:
a   -144
  Eigenwerte von A:
    -3.44
     0.83
     3.30
    15.32
b Eigenvektoren von A:
     0.711   0.050   0.386   0.585
     0.164  -0.007  -0.903   0.396
    -0.650  -0.259   0.186   0.690
    -0.211   0.964   0.024   0.158
  Produkt der Eigenwerte:
c  -144.0000
  A*v2 - lambda2*v2
     0.0000000000
     0.0000000000
d    0.0000000000
    -0.0000000000
  Skalarprodukt von v1 und v2
     0.0000000000
```

$A \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2$

```
Länge von v1
    1.0000
    1.0000
    1.0000
Vtransponiert*A*V                    e
   -3.4416    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000    0.8288    0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    3.2961   -0.0000
    0.0000    0.0000   -0.0000   15.3168
Zerlegung des Vektors b=[1;2;3;4]
nach Eigenvektoren von A
Koeffizienten der Eigenvektoren      f
  a(1) = -1.753666
  a(2) =  3.116553
  a(3) = -0.768242
  a(4) =  4.076954
Verifikation der Zerlegung von b
1.0000000000000000
2.0000000000000000
2.9999999999999996
3.9999999999999996
Zerlegung von v1                     g
    1.0000
    0.0000
   -0.0000
```

Vorlesung : Schwingerkette mit 2 gleichen Massen und gleichen Federkonstanten



Bewegungsgleichungen :

$$m\cdot\ddot{x}_1(t) = -c\cdot x_1(t) - c\cdot\left[x_1(t)-x_2(t)\right]$$
$$m\cdot\ddot{x}_2(t) = -c\cdot\left[x_2(t)-x_1(t)\right] - c\cdot x_2(t)$$

Anfangsbedingungen :

$$x_1(t=0)=x_{10}\quad \dot{x}_1(t=0)=v_{10}$$
$$x_2(t=0)=x_{20}\quad \dot{x}_2(t=0)=v_{20}$$

Eigenwert-Eigenvektorproblem :

$$\begin{bmatrix} 2\cdot c/m & -c/m \\ -c/m & 2\cdot c/m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \omega^2\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = a_1\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}\cdot\cos(\omega_1\cdot t) + a_2\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\cos(\omega_2\cdot t) + b_1\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}\cdot\sin(\omega_1\cdot t) + b_2\cdot\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\sin(\omega_2\cdot t)$$

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1\omega_1 \\ b_2\omega_2 \end{bmatrix}$$

Lösungsschritte mit MATLAB

1. 'Steifigkeitsmatrix' definieren

$$SM = \begin{bmatrix} 2\cdot c/m & -c/m \\ -c/m & 2\cdot c/m \end{bmatrix}$$

2. Eigenwert- Eigenvektorproblem lösen `[ V, D ] = eig(SM)`

$$V = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \text{sqrt}(\text{diag}(D))$$

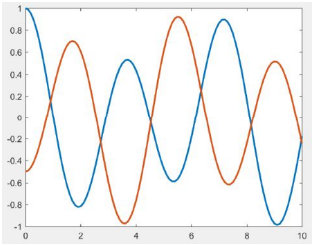
3. Anteile der Eigenschwingungen aus den Anfangsbedingungen berechnen
Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit nach Eigenvektoren zerlegen

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = V \backslash \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\omega_1 \\ 1/\omega_2 \end{bmatrix} .* \text{mldivide}\left(V, \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix}\right)$$

4. Lösung für das Anfangswertproblem :

```
t = 0 : 0.1 : 10
x = V(:,1) * ( a1 * cos(ω1 * t) + b1 * sin(ω1 * t) ) +
    V(:,2) * ( a2 * cos(ω2 * t) + b2 * sin(ω2 * t) )
plot( t, x )
```

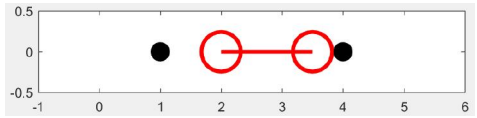
Beachte : x ist eine 2*101-Matrix



Aufgabe 3 :

Das MATLAB-Skript `prakt4/a3kette2mScr.m` berechnet die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren einer linearen Kette mit 2 Massen und 3 Federn. Dann wird die Lösung für das Anfangswertproblem bestimmt und über der Zeit gezeichnet. Anschließend wird eine animierte Lösung ausgegeben.

a) Versuchen Sie das Programm zu verstehen. Wie entsteht die Animation? Was wird genau in den beiden Plot-Anweisungen gezeichnet?

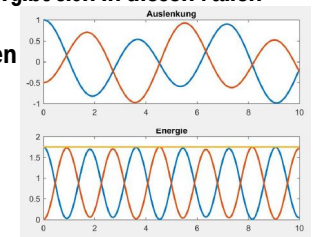


b) Ändern Sie die Anfangsbedingungen ab.

c) Versuchen Sie in der Animation die aktuelle Zeit anzuzeigen.

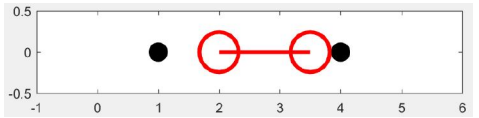
d) Ändern Sie die Anfangsbedingungen so, dass sich Eigenschwingungen ergeben, d.h. setze `x0 = [ 1 1 ]` oder `x0 = [ 1 -1 ]`. Was ergibt sich in diesen Fällen für den Vektor a?

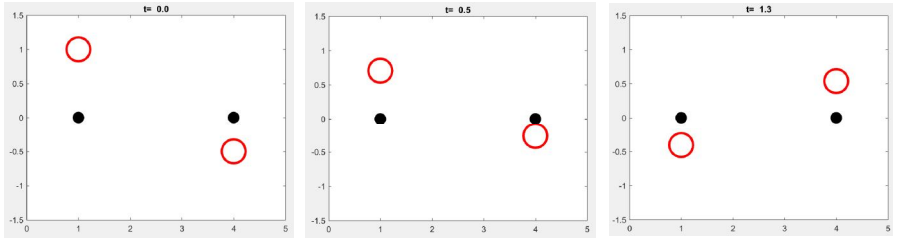
e) Zeichnen Sie in Abhängigkeit der Zeit folgende Größen
- **die kinetische Energie, die in beiden Massen insgesamt enthalten ist**
- **die potentielle Energie, die in den drei Federn insgesamt steckt**
- **die Gesamtenergie im System**



Aufgabe 3 :

f) Was muss am Programm geändert werden, damit die Auslenkungen aus der Ruhelage bei der Animation nicht horizontal sondern vertikal gezeichnet werden?





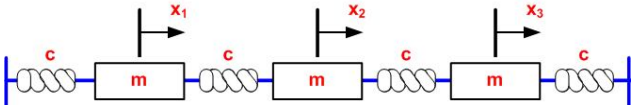
g) Was passiert, wenn man den folgenden Abschnitt in der while-Schleife löscht? Welchen Effekt hat dieser Abschnitt?

```
if t == 0
   pause(5.0);
else
   pause(delta_t);
end
```

4.4 Kette mit drei Massen

Aufgabe 4 :

Ändern Sie das Skript `prakt4/a4kette3mScr.m` so ab, dass ein System mit 3 Massen gelöst wird. Wie ist die Form der Eigenschwingungen?



$$\begin{bmatrix}\ddot{x}_1(t)\\ \ddot{x}_2(t)\\ \ddot{x}_3(t)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}2c/m & -c/m & 0\\ -c/m & 2c/m & -c/m\\ 0 & -c/m & 2c/m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

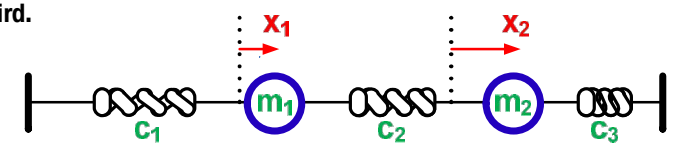
$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\cdot\cos(\omega\cdot t)\\ x_2\cdot\cos(\omega\cdot t)\\ x_3\cdot\cos(\omega\cdot t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\cdot\cos(\omega\cdot t) = \vec{x}\cdot\cos(\omega\cdot t) \qquad \begin{bmatrix}\ddot{x}_1(t)\\ \ddot{x}_2(t)\\ \ddot{x}_3(t)\end{bmatrix} = -\omega^2\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

$$\begin{bmatrix}2c/m & -c/m & 0\\ -c/m & 2c/m & -c/m\\ 0 & -c/m & 2c/m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \omega^2\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

4.5 Kette mit zwei unterschiedlichen Massen

Aufgabe 5 :

Ändern Sie das Skript `prakt4/a5kette2mScr.m` so ab, dass ein System mit zwei unterschiedlichen Massen und drei unterschiedlichen Federkonstanten gelöst wird.



Bewegungsgleichungen :

$$m_1\cdot\ddot{x}_1(t) = -c_1\cdot x_1(t) - c_2\cdot\left[x_1(t) - x_2(t)\right]$$
$$m_2\cdot\ddot{x}_2(t) = -c_2\cdot\left[x_2(t) - x_1(t)\right] - c_3\cdot x_2(t)$$

- **Stellen Sie zuerst die Gleichungen für das Eigenwert-Eigenvektorproblem auf.**
- **Ändern Sie dann das Skript entsprechend ab.**
- **Testen Sie ihr Programm. Wenn die Massen und die Federkonstanten gleich sind, sollte sich wieder die Lösung aus Aufgabe 3 ergeben.**

Termin 5 : Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Aufgabe 1

In der Vorlesung ist das Eulerverfahren zur Lösung der DGL für eine ungedämpfte Schwingung behandelt worden. Programmieren Sie jetzt analog dazu das Eulerverfahren für eine gedämpfte Schwingung. DGL und Anfangsbedingungen lauten allgemein wie folgt :

$$\ddot{y}(t) + 2\cdot\delta\cdot\dot{y}(t) + \omega^2\cdot y(t) = 0 \qquad y(t=0) = y_0 \qquad \dot{y}(t=0) = v_0$$

Die Größe δ beschreibt die Stärke der Dämpfung. Es wird hier angenommen, dass die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit ist. Für δ=0 ergibt sich die ungedämpfte Schwingung. Die Anfangsbedingung lautet : $y(t=0) = 2\,, \quad \dot{y}(t=0) = 0$
d.h. zur Zeit t=0 wird die Masse ausgelenkt und dann losgelassen.

a) Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung in ein System von zwei DGLn 1. Ordnung um.

b) Wie lautet die Iteration mit der man y_{n+1} und v_{n+1} aus y_n und v_n berechnen kann? y_n ist die Auslenkung zur Zeit t_n und v_n die Geschwindigkeit.

$t_{n+1} = t_n + \Delta t$ AW: $t_1 = 0$
$y_{n+1} = y_n +$ y_1 = Anfangsauslenkung
$v_{n+1} = v_n +$ v_1 =Anfangsgeschwindigkeit

Aufgabe 1

c) Öffnen Sie das Skript `a1EulerGedsw.m` und ergänzen Sie es so, dass die DGL im Zeitintervall [0 , 30] gelöst wird. Geben Sie die Auslenkung und die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit graphisch aus.
Variieren Sie die Schrittweite Δt.

d) Wie sieht eine Lösung bei sehr kleiner Dämpfung aus? Wie sieht eine Lösung für sehr große Dämpfung aus? Was bedeutet eigentlich klein oder groß ? Wie könnte man groß oder klein definieren?

e) Variieren Sie bei δ=0 die Schrittweite und das Zeitintervall.

f) Wie muss die Schrittweite Δt gewählt werden, damit die Lösung auf 1% genau berechnet wird?

Aufgabe 2

Es wird zusätzlich eine äußere Kraft berücksichtigt, die auf das gedämpfte, schwingende System einwirkt – eine sinusförmige Anregung mit der Frequenz ω_1. Die DGL lautet dann :

$$\ddot{y}(t) + 2\cdot\delta\cdot\dot{y}(t) + \omega^2\cdot y(t) = F\cdot\sin(\omega_1\cdot t) \qquad y(t=0) = y_0 \qquad \dot{y}(t=0) = v_0$$

Die Größe F beschreibt die Stärke der Anregung. F=0 bedeutet, dass keine äußere Kraft einwirkt. Beachten Sie, dass es zwei verschiedene Frequenzen gibt, die Frequenz der äußeren Anregung ω_1 und die „innere Frequenz“ ω.

a) Wie lautet jetzt das System von DGLn 1. Ordnung?

b) Wie lautet die Iteration, mit der man y_{n+1} und v_{n+1} aus y_n und v_n berechnen kann? y_n ist die Auslenkung zur Zeit t_n und v_n die Geschwindigkeit.

$t_{n+1} = t_n + \Delta t$ AW: $t_1 = 0$
$y_{n+1} = y_n +$ y_1 = Anfangsauslenkung
$v_{n+1} = v_n +$ v_1 =Anfangsgeschwindigkeit

Aufgabe 2

c) Öffnen Sie das Skript `a2EulerAngeregt.m` . Es enthält die Lösung von Aufgabe 1. Ergänzen Sie das Skript so, dass die gedämpfte Schwingung mit äußerer Anregung im Intervall [0 , 30] gelöst wird.
In diesem Skript werden nicht mehr zwei Vektoren y und v verwendet.
y wird zu einer Matrix mit zwei Spalten. Spalte 1 enthält die Auslenkung und Spalte 2 die Geschwindigkeit.

y(n) -> y(n,1)
v(n) -> y(n,2)

$$y(n+1,1) = y(n,1) + y(n,2)\cdot\Delta t$$
$$y(n+1,2) = y(n,2) - (2\cdot\delta\cdot y(n,2) + \omega^2\cdot y(n,1))\cdot\Delta t$$

Bei einem System von k DGLn erster Ordnung wird eine Matrix mit k Spalten verwendet. Spalte j enthält die Funktionswerte Lösungsfunktion j (1<=j<=k).
plot(t(:), y(:,j)) zeichnet die Lösungsfunktion j .
Die Zeile y(n,:) enthält die Funktionswerte zur Zeit t(n).

d) Was passiert, wenn die beiden Frequenzen ω und ω_1 annähernd gleich sind ?
Wie nennt man dieses Phänomen?
Wie sieht die Lösung für $\omega >> \omega_1$ typischerweise aus ? Was bedeutet das physikalisch ?
Wie sieht die Lösung für $\omega << \omega_1$ typischerweise aus?

Aufgabe 3

Erstellen Sie ein Skript `a3Euler.m` , das eine beliebige DGL 2. Ordnung lösen kann. Welche DGL vom Eulerverfahren konkret gelöst wird, wird über ein Function-Handle festgelegt. Über dieses Function-Handle werden die beiden ersten Ableitungen berechnet.

a) Ergänzen Sie die Funktion `a3gedswdgl.m` . Diese Funktion besitzt zwei Parameter, nämlich die Zeit t und den Vektor y (y enthält zwei Elemente). Das erste Element von y ist die Auslenkung zur Zeit t und das zweite die Geschwindigkeit zur Zeit t. Die Funktion gibt als Rückgabewert die beiden ersten Ableitungen der zugehörigen DGL zurück (siehe DGL 1. Ordnung aus Aufgabe 1).

b) Im Skript `a3Euler.m` wird in Zeile 12 ein Function-Handle gesetzt. Damit wird die DGL festgelegt, die im Folgenden gelöst wird. In Zeile 20 werden dann über das Function-Handle die beiden ersten Ableitungen zur Zeit t berechnet. Damit wird die neue Auslenkung und die neue Geschwindigkeit berechnet. Siehe nächste Folie. Testen Sie, ob ihr Programm die richtige Lösung liefert.

c) Wie muss die Funktion `a3gedswdgl.m` geändert werden, um eine zusätzliche äußere Kraft der Form $F(t) = 2\cdot\sin(3\cdot t)$ zu berücksichtigen.

Bei diesem Beispiel wird dann auch der erste Aufrufparameter (die Zeit t) der Funktion `a3gedswdgl.m` verwendet.

Aufgabe 3

Editor - U:\Matlab\prakt5\a3Euler.m

a3Euler.m

```
6     % Anfangswerte setzen
7     n=1;
8     t(n)=0;
9     y(n,1)=2.0;
10    y(n,2)=0.0;
11    % setze Funktion-Handle
12
13
14    % Iteration
15    dt = 0.01;  % Schrittweite
16    while ( t(n) < 30 )
17      t(n+1) = t(n) + dt;
18      % berechne die erste Ableitung
19      % mit Hilfe des Function-Handles
20
21      y(n+1,1)= y(n,1)      ; % ergänzen
22      y(n+1,2)= y(n,2)      ; % ergänzen
23      n = n+1;
24    end
```

Editor - U:\Matlab\prakt5\a3gedswdgl.m

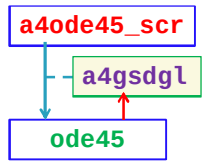
a3gedswdgl.m

```
1   function [dy_dt] = a3gedswdgl(t,y)
2
3   global w d;
4
5   %erste Ableitungen berechnen
6   dy_dt(1,1) =
7
8   dy_dt(2,1) =
9
10  end
```


Aufgabe 4:

Lösen Sie die DGL für eine gedämpfte Schwingung mit Hilfe von `ode45`.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\cdot\delta\cdot\frac{dy}{dt} + \omega^2\cdot y(t) = 0 \qquad y(t=0) = 2 \quad \dot{y}(t=0) = 0$$



a) Verwenden Sie die beiden Dateien `a4ode45_scr` und `a4gsdgl`. Ergänzen Sie das Skript um den Aufruf der MATLAB-Funktion `ode45`. Stellen Sie die Auslenkung und Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit graphisch dar.

b) `ode45` verwendet keine feste Schrittweite Δt für die Zeitintervalle. Wie groß ist der Abstand der Zeitpunkte bei `t=0` und bei `t=20`? Wie viele verschiedene Zeitpunkte werden für die Lösung verwendet? Ändern Sie das Skript so, dass die entsprechenden Antworten ausgegeben werden.

c) Ändern Sie den Funktionsaufruf von `ode45` so, dass die Lösungen in Zeitabständen von jeweils 0.02 berechnet werden (siehe `help ode45`).

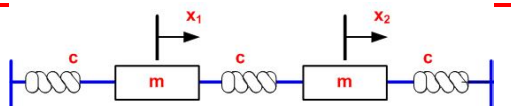
d) Ändern Sie die beiden Programme so ab, dass auch eine äußere Anregung mit berücksichtigt werden kann. Die Amplitude der Anregung und die äußere Frequenz werden im Skript gesetzt.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\cdot\delta\cdot\frac{dy}{dt} + \omega^2\cdot y(t) = A\cdot\sin(\omega_1\cdot t)$$

5.4 Kette mit zwei Massen

Aufgabe 5:

Gegeben ist eine Kette mit zwei schwingenden Massen.



Dieses System wird durch folgende DGL beschrieben :

$$m \cdot \ddot{x}_1(t) = -c \cdot x_1(t) - c \cdot [x_1(t) - x_2(t)]$$
$$m \cdot \ddot{x}_2(t) = -c \cdot [x_2(t) - x_1(t)] - c \cdot x_2(t)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -2 \cdot x_1(t) + x_2(t)$$
$$\ddot{x}_2(t) = -2 \cdot x_2(t) + x_1(t)$$

Die Massen m und die Federkonstanten werden 1 gesetzt. Damit ergibt sich das System auf der rechten Seite.

a) Schreiben Sie die beiden DGLn 2. Ordnung in ein System von vier DGLn erster Ordnung um. Hierzu müssen Sie vier Hilfsgrößen einführen :

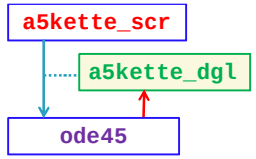
$$y_1(t) = x_1(t) \quad y_2(t) = \dot{x}_1(t) \quad y_3(t) = x_2(t) \quad y_4(t) = \dot{x}_2(t)$$

Das System wird dann durch einen Vektor y mit vier Komponenten beschrieben. Die Anfangsbedingungen legen die 4 Komponenten von y zur Zeit t=0 fest.

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{\vec{y}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) = \\ \dot{y}_2(t) = \\ \dot{y}_3(t) = \\ \dot{y}_4(t) = \end{bmatrix} \qquad \vec{y}(t=0) = \begin{bmatrix} x_1(t=0) = x10 \\ \dot{x}_1(t=0) = 0 \\ x_2(t=0) = x20 \\ \dot{x}_2(t=0) = 0 \end{bmatrix}$$

5.4 Kette mit zwei Massen

Aufgabe 5:



Verwenden Sie die beiden Programme `a5kette_scr` und `a5kette_dgl` um das Anfangswertproblem zu lösen.

b) In der Funktion `a5kette_dgl` wird die erste Ableitung von y berechnet. Die Funktion gibt einen Spaltenvektor mit vier Zeilen zurück.

c) Im Skript `a5kette_scr.m` wird die Anfangsbedingung gesetzt und die Funktion `ode45` aufgerufen. Diese liefert eine Matrix mit vier Spalten zurück. Welche Spalte enthält was? In welchen Spalten befinden sich die Auslenkungen? Wie wird das festgelegt?
Dann werden die Auslenkungen mit Hilfe von `subplot` in zwei Fenstern dargestellt.

d) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit sich Eigenschwingungen ergeben? Ändern Sie die Anfangsbedingungen so, dass sich Eigenschwingungen ergeben.

Termin 6 : Simulink – Übungsbeispiele

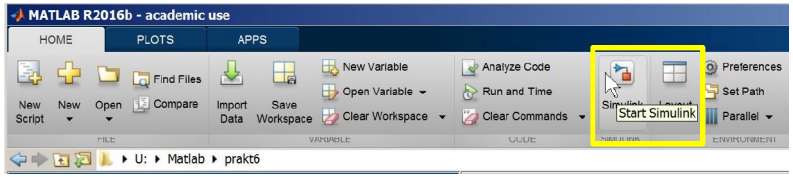
6.1 Sinusgenerator und Integration

Aufgabe 1:

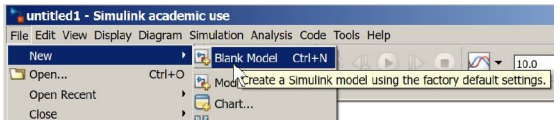
Erstellen Sie ein Simulink-Modell `sinusgenerator.slx`, das ein sinusförmiges Signal `a(t)=1.2*sin(2*t+30°)` im Zeitintervall `[0,20]` integriert. Das Ergebnis und das Ausgangssignal sollen graphisch dargestellt werden.

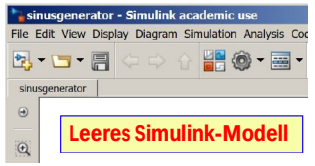
Arbeitsschritte :

1. **Starten Sie Simulink über das Simulink-Icon der MATLAB-Toolbar.**



2. **Erstellen Sie ein Simulink-Modell über File->New->Blank Model und speichern Sie das Modell in der Datei `sinusgenerator.slx` auf dem U-Laufwerk.**





Leeres Simulink-Modell

6.1 Sinusgenerator und Integration

3. **Block im Simulink Library Browser selektieren und in das Simulink Modell ziehen**

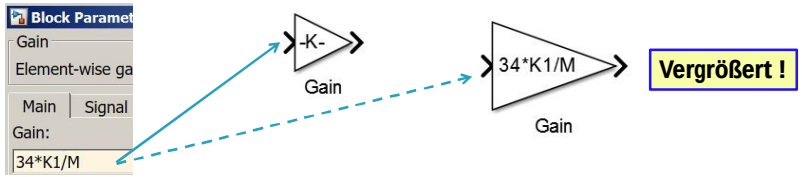
Blöcke verbinden :

bei gedrückter linker Maustaste vom Ausgangsport zum Zielport ziehen

Größe eines Blocks verändern :

Block selektieren und dann an den Ecken ziehen

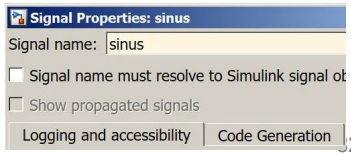
Wird die Größe eines Blocks verändert, kann sich die Darstellung von Informationen über den Block ändern. Beispiel : der Faktor, der in einem Gain-Block eingetragen ist



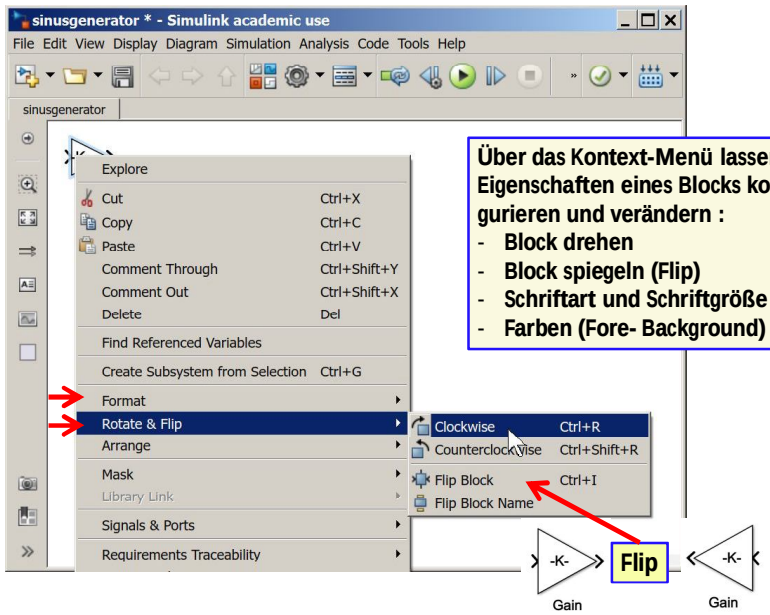
Vergrößert !

Signal : Namen zuweisen

Signal selektieren und das Kontextmenü öffnen, dann den Menüpunkt „Properties“ wählen und bei „Signal name“ den Namen eintragen



6.1 Sinusgenerator und Integration

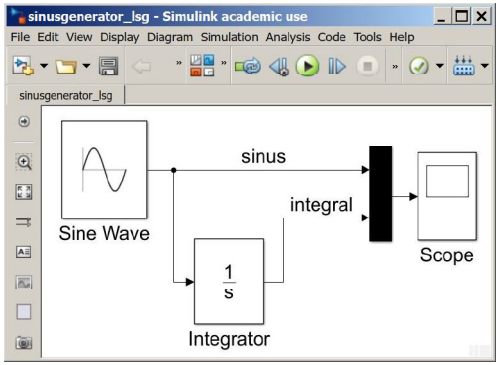


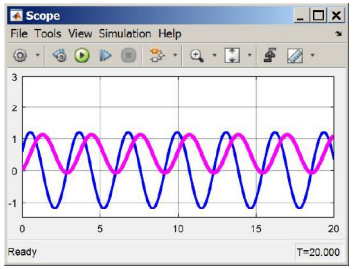
Über das Kontext-Menü lassen sich Eigenschaften eines Blocks konfigurieren und verändern :

- **Block drehen**
- **Block spiegeln (Flip)**
- **Schriftart und Schriftgröße ändern**
- **Farben (Fore- Background)**

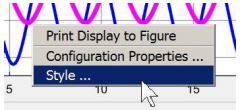
6.1 Sinusgenerator und Integration

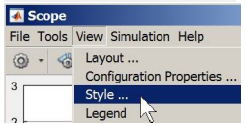
4. Setzen Sie die Parameter des Blocks „Sine Wave“ um das gewünschte Signal zu erzeugen. Setzen Sie die Simulationsdauer und starten Sie das Modell. Prüfen Sie das Ergebnis im Block Scope.





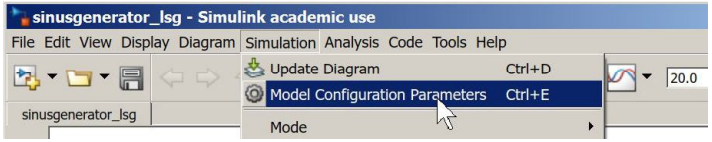
5. Ändern Sie die Linienstärke und die Farben der Linien. Öffnen Sie hierzu das Kontex-Menü des Scope-Fensters oder wählen Sie Menü->View

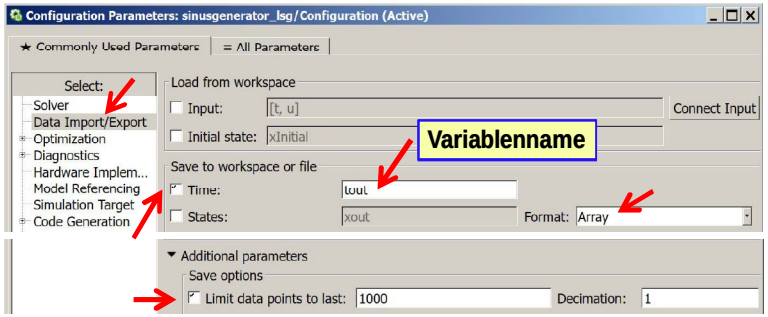




6.1 Sinusgenerator und Integration

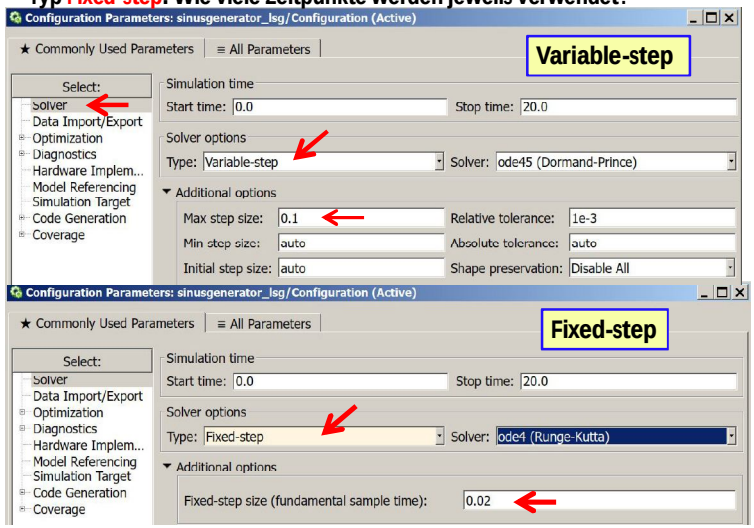
5. Wie viele Zeitpunkte werden verwendet, um das Integral im Zeitraum [0, 20] zu berechnen ? Wie können Sie das beeinflussen?
Öffnen Sie das Menü Simulation -> Model Configuration Parameters -> Data Import /Export und aktivieren Sie die Ausgabe der Zeitpunkte (Zeitpunkte, die bei der Simulation verwendet werden) in den Workspace. Starten Sie dann die Simulation. Wie viele Elemente besitzt der Vektor tout? Sind die Zeitabstände äquidistant?





6.1 Sinusgenerator und Integration

6. Die Kurven, die im Scope-Block dargestellt werden, sind nicht glatt, weil die Zeitabstände, an denen die Signalwerte berechnet werden, zu groß sind. Begrenzen Sie die Zeitabstände auf 0.02. Verwenden Sie einem Solver vom Typ Variable-step und dann einen Solver vom Typ Fixed-step. Wie viele Zeitpunkte werden jeweils verwendet?



6.1 Sinusgenerator und Integration

Zusatzaufgaben :

a) Setzen Sie den Anfangswert für das Integral auf 0.3.

b) Weisen Sie den beiden Signalen Namen zu (jeweils ein Signal selektieren und dann das Kontextmenü öffnen).

c) Ändern Sie die Darstellung des Mux-Blockes, so dass die Signalnamen an den Eingangs-ports angezeigt werden. Ändern Sie die Hintergrundfarbe des Integratorblocks. Ändern Sie die Foreground Color des Sinus-Blocks.

d) Ändern Sie die Darstellung des Ergebnisses. Der Scope-Block soll die beiden Signale in zwei verschiedenen Fenstern darstellen.

e) Begrenzen Sie den y-Bereich, der im Scope-Block angezeigt wird, auf [-2, +2].

f) Begrenzen Sie die gespeicherte Datenmenge auf den letzten 30 Punkte. Was wird dann im Scope-Block angezeigt ?

g) Speichern Sie die Werte der beiden Signale in Variablen des Workspace ab. Verwenden Sie verschiedene Lösungsvarianten
   - Scope-Block
   - ToWorkspace-Block

h) Setzen Sie die Amplitude und die Frequenz der Sinus-Schwingung mit Hilfe der Variablen A und omega , die im MATLAB-Workspace definiert werden. Überzeugen Sie sich, dass die Werte aus dem Workspace tatsächlich von Simulink übernommen werden.

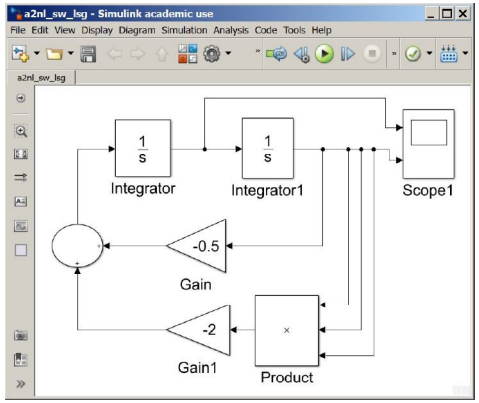
6.2 Nichtlineare Schwingung

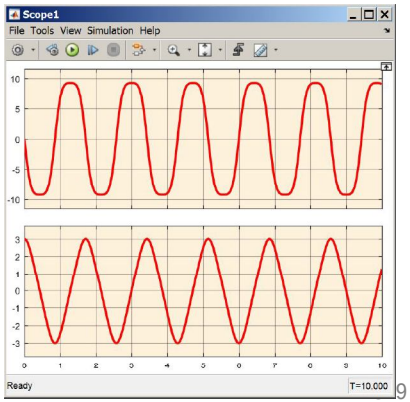
Aufgabe 2: Erstelle `a2nl_sw.slx`

Lösen Sie die folgende nichtlineare DGL zur Beschreibung einer Schwingung mit Simulink. Auslenkung und Geschwindigkeit sollen in zwei unterschiedlichen Fenstern eines Scope-Blocks dargestellt werden. Begrenzen Sie die Schrittweite.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.5 * y(t) + 2 * y(t)^3 = 0$$

$$v0 = \dot{y}(t=0) = 0 \quad , y0 = y(t=0) = 3$$





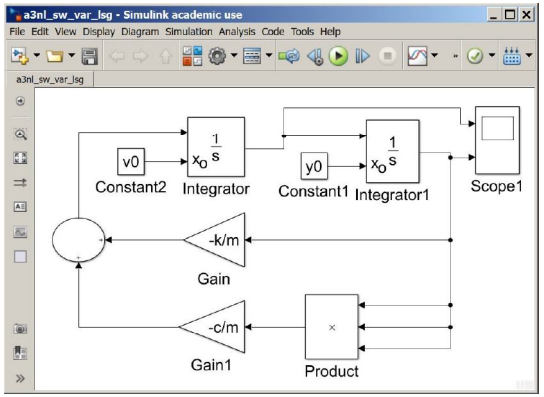
6.3 Nichtlineare Schwingung und MATLAB-Variablen

Aufgabe 3:

Verwenden Sie für die Parameter der nichtlinearen DGL drei Variablen `k`, `m` und `c`, die im MATLAB-Workspace definiert werden. Die Anfangsbedingungen werden über zwei MATLAB-Variablen `v0` und `y0` definiert. Öffnen Sie `a3nl_sw_var.slx` und ändern Sie das Modell geeignet ab. Starten Sie dann die Simulation.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} * y(t) + \frac{c}{m} * y(t)^3 = 0$$

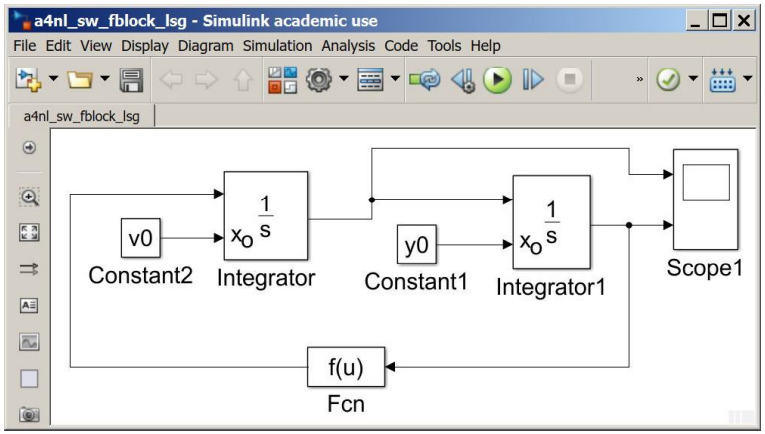
$$\dot{y}(t=0) = v0 \quad , \quad y(t=0) = y0$$



6.4 Nichtlineare Schwingung und Function-Block

Aufgabe 4:

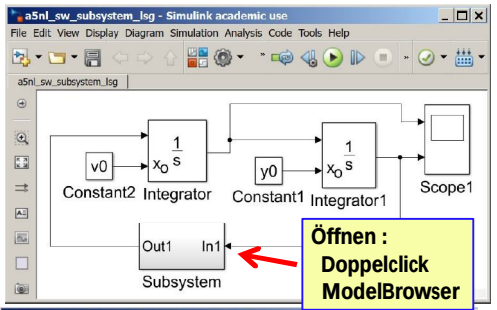
Ersetzen Sie die Blöcke zur Berechnung der Beschleunigung im Modell `a4nl_sw_fblock.slx` durch einen Function-Block.

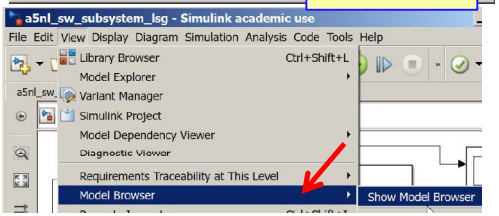


6.5 Nichtlineare Schwingung und Subsystem-Block

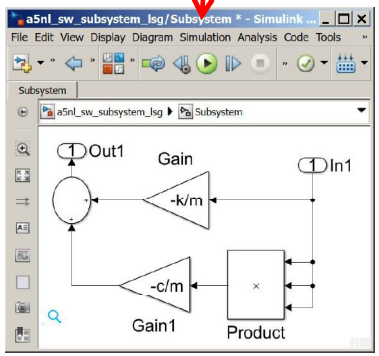
Aufgabe 5:

Ersetzen Sie die Blöcke zur Berechnung der Beschleunigung im Modell `a5nl_sw_subsystemVar1.slx` durch einen Subsystem-Block.



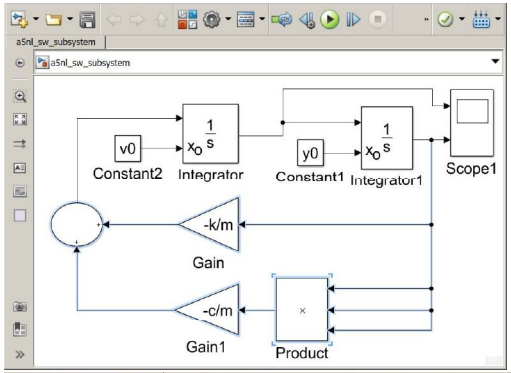


Variante 1 : Subsystem-Block einfügen und danach das Subsystem aufbauen



6.5 Nichtlineare Schwingung und Subsystem-Block

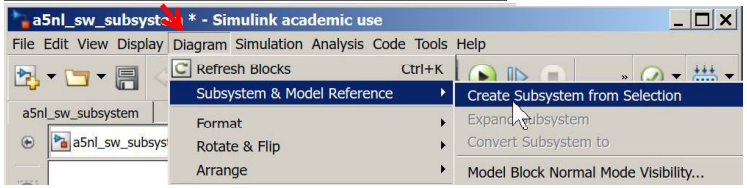
Variante 2 : Bestehende Blöcke in ein Subsystem verlagern
`a5nl_sw_subsystemVar2.slx`



Alle Blöcke, die in das Subsystem verlagert werden sollen, werden selektiert, ebenso die Eingangs- und die Ausgangssignale. Die Selektion erfolgt auf zwei Arten

- einen rechteckigen Bereich wählen
- Drücken der Shift-Taste und Selektion

Danach Menü **Diagram-> Sub-system&Model Reference -> Create Subsystem from Selection** oder **Kontextmenü -> Create Sub-system from Selection** wählen.

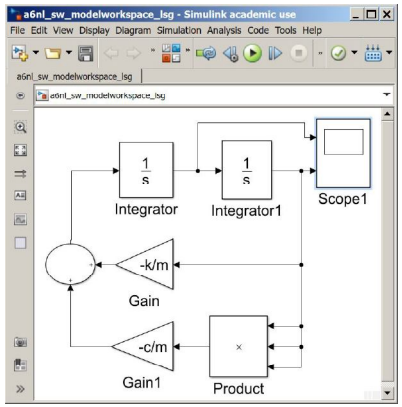


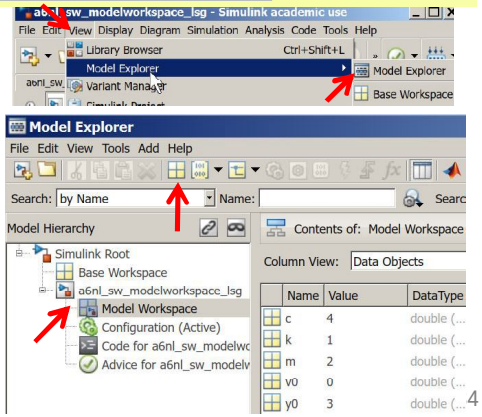
6.6 Model-Workspace

Aufgabe 6:

Verwenden Sie für die Parameter der nichtlinearen DGL drei Variablen `k`, `m` und `c`, die im Model-Workspace (nicht MATLAB-Workspace) definiert werden. Die Anfangsbedingungen werden über zwei Variablen `v0` und `y0` definiert. Öffnen Sie das Modell `a6nl_sw_model workspace.slx` und ändern Sie dieses geeignet ab. Starten Sie dann die Simulation.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}*y(t)+\frac{c}{m}*y(t)^3=0 \qquad \dot{y}(t=0)=v0 \;,\; y(t=0)=y0$$





6.7 Nichtlineare gedämpfte Schwingung und äußerer Kraft

Aufgabe 7 :

Lösen Sie mit Hilfe von Simulink das Anfangswertproblem für folgende DGL:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\cdot\delta\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{k}{m}\cdot y(t)+\frac{c}{m}\cdot y(t)^3=A\cdot e^{-\lambda\cdot t} \qquad v0=\dot{y}(t=0)=0 \;,\; y0=y(t=0)=2$$

d.h. für eine nichtlineare gedämpfte Schwingung mit einer exponentiell abnehmenden äußeren Kraft. Ergänzen Sie das Modell `a7nl_sw_ged_ext.slx` um die notwendigen Blöcke. Definieren Sie die fehlenden Parameter im Modell-Workspace.

Hinweis : Verwenden Sie einen MUX-Block mit drei Eingängen für

- **die Geschwindigkeit**
- **die Auslenkung**
- **die Zeit t**

Den Ausgang des MUX-Blockes führen Sie in einen Function-Block der folgenden Ausdruck berechnet :

$$-2\cdot\delta\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{k}{m}\cdot y(t)-\frac{c}{m}\cdot y(t)^3+A\cdot e^{-\lambda\cdot t}$$

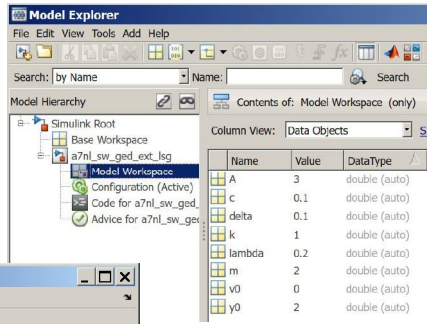
Die Zeit t kann einfach mit Hilfe des Blocks Clock (siehe Simulink -> Sources) geholt werden.

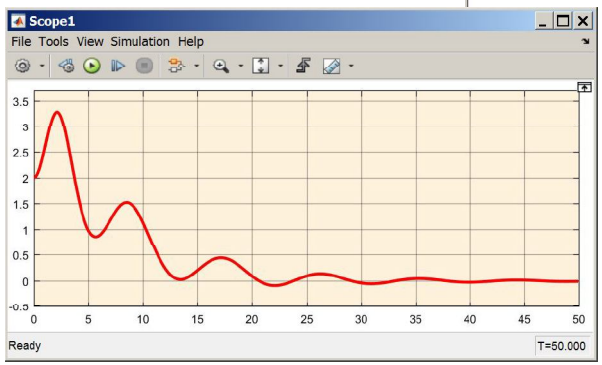
6.7 Nichtlineare gedämpfte Schwingung und äußerer Kraft

Wählen Sie die Parameter wie rechts gezeigt. Für die Auslenkung ergibt sich dann das unten gezeigte Bild. Versuchen Sie die Kurve zu erklären.

Was passiert, wenn man den Wert von lambda verkleinert oder vergrößert?

Was passiert, wenn man den Wert von A verkleinert oder vergrößert?





Aufgabe 8:

Erstellen Sie ein Simulink-Modell für folgende DGL :

$$\ddot{x} + d \cdot \mathrm{sgn}(\dot{x}) \cdot \dot{x}^2 + \omega_0^2 \cdot x = \sin(\omega \cdot t) \qquad \dot{x}(t=0) = 0 \quad , \quad x(t=0) = 0$$

Stellen Sie die Auslenkung und die Anregung als Funktion der Zeit dar.

Hierbei handelt es sich um eine angeregte Schwingung, bei der die Dämpfung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist.

Wählen Sie : $\omega_0^2 = 5$, $\omega = 1$ und $d = 0.4$. Definieren Sie alle Parameter im Modell-Workspace.

Die Signum-Funktion (Vorzeichenfunktion) ist erforderlich, damit die Dämpfungskraft stets der Bewegung entgegen wirkt. Für die Signum-Funktion gibt es bereits einen fertigen Simulink-Block. Für die Signum-Funktion gilt :

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Siehe auch :

Scherf Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme
Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, 2010

Ingenieurinformatik

Numerik für Ingenieure

Name	Vorname	Semestergruppe	Hörsaal

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Summe

Studienbeginn vor WS13/14 (Kombinationsprüfung) **	☐
Studienbeginn ab WS13/14 bis WS15/16 **	☐
Studienbeginn ab SS16 bis WS17/18 (Kombinationsprüfung)	☐
Studienbeginn ab SS18	☐

**** Die Prüfung ist nur dann gültig, wenn Sie die Zulassungsvoraussetzung erworben haben (erfolgreiche Teilnahme am Praktikum).**

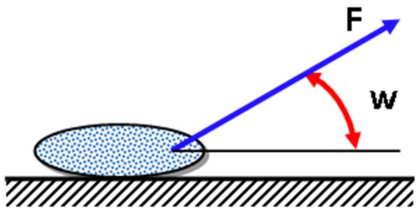
Aufgabensteller: Dr. Reichl, Dr. Küpper und Kollegen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Hilfsmittel:
- **Taschenrechner nicht zugelassen**
- **PC/Notebook nicht zugelassen**
- **Sonstige eigene Hilfsmittel sind erlaubt**
- **Bearbeitung mit Bleistift ist erlaubt**

****** Viel Erfolg!!! ******

Aufgabe 1: (ca. 18 Punkte)




```
Winkel   Kraft
     5  13.636
     6  13.578
     . . .
    34  13.662
    35  13.727
Minimum: w= 19 Kraft= 13.214
Mittelwert der Kräfte 13.379
```

Ein Sack Reis mit einer Masse von 40kg wird von einer Person mit der Kraft F unter dem Winkel w gezogen. Der Betrag der Kraft F ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$F(w) = \frac{m \cdot \mu}{\mu \cdot \sin(w) + \cos(w)}$$

wobei **m** die Masse und μ der Reibungskoeffizient ist. Dieser wird mit 0.35 angenommen.

Schreiben Sie ein MATLAB-Skript zur Ausgabe einer Tabelle (siehe oben rechts). In jeder Zeile der Tabelle wird ein Winkel und die zugehörige Kraft angegeben. Der Winkelbereich reicht von 5° bis 35° mit einer Schrittweite von einem Grad. Die Kraft wird über eine Funktion bestimmt.

Am Ende der Tabelle wird der Winkel ausgegeben, bei dem die Kraft ein **Minimum** besitzt. Das Minimum wird aus den berechneten Tabellenwerten ermittelt. Bei mehrfachen Minima geben Sie den kleinsten Winkel aus. Die zugehörige Kraft wird ebenfalls ausgegeben. Danach geben Sie den Mittelwert aller Kräfte aus.

Beachten Sie: Die Tabelle besitzt eine Überschrift. Winkel werden ohne Nachkommastellen ausgegeben, Kräfte mit je drei Nachkommastellen. Die Werte für Winkel und Kraft sollen in der Tabelle rechtsbündig untereinander ausgegeben werden.

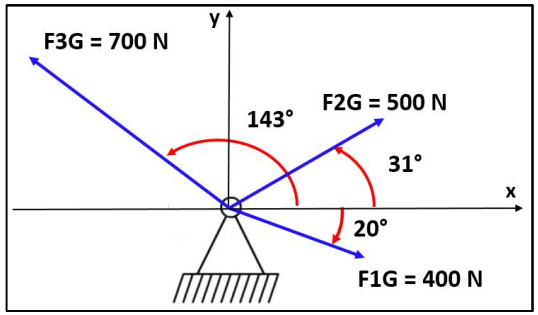
Die Kraft in Abhängigkeit von Reibungskoeffizient μ, Masse **m** und Winkel **w** wird in einer MATLAB-Funktion **`kraft`** berechnet und zurückgegeben. Erstellen Sie diese Funktion.

Aufgabe 2: (ca. 11 Punkte)

Auf ein Festlager wirken drei Kräfte wie im Bild rechts dargestellt.

Schreiben Sie ein MATLAB-Skript zur Berechnung der Gesamtkraft F. Geben Sie den Betrag der Gesamtkraft aus. Der Winkel, den die Gesamtkraft mit der x-Achse einschließt, wird in Grad ausgegeben. Ein Beispiel, wie die Ausgabe aussehen könnte, finden Sie hier:

```
Gesamtkraft: 594.956198
Winkel: 65.638402
```



Ergänzen Sie das nachfolgende MATLAB-Skript. Verwenden Sie zur Berechnung der Lösung die Variablen, die bereits definiert sind.

```
F1G = 400; F2G = 500; F3G = 700;
w1 = -20;  w2 = 31;   w3 = 143;
```


Aufgabe 3: (ca. 13 Punkte)

Gegeben ist eine symmetrische Matrix A und ein Spaltenvektor z. Matrix und Vektor besitzen gleich viele Zeilen. Matrix und Vektor sind bereits im MATLAB-Workspace definiert.
Erstellen Sie ein MATLAB-Skript, das den Anwender auffordert eine Schranke einzugeben. Dann werden alle Eigenvektoren der Matrix mit der MATLAB-Funktion **`eig`** berechnet. Geben Sie die Nummern aller Eigenvektoren aus, deren Skalarprodukt mit dem Vektor z größer ist als die eingegebene Schranke. Der Wert des Skalarprodukts wird ebenfalls ausgegeben. Am Ende wird angezeigt, wie viele solcher Eigenvektoren gefunden worden sind. Ein Beispiel für die Ausgabe finden Sie oben rechts. Der Anwender hat hier 0.35 für die Schranke eingegeben.

```
Schranke: 0.35
Nummer 4: 0.405
Nummer 6: 0.575
Nummer 9: 1.372
Anzahl : 3
```

Aufgabe 4: (ca. 25 Punkte)

Ein Flugzeug verwendet einen Bremsfallschirm und andere Mittel um nach der Landung zu bremsen. Die Änderung der Geschwindigkeit v beim Landen ist gegeben durch:

$$\frac{dv}{dt} = -0.0035 \cdot v^2 - 3$$

Zur Zeit t=0 befindet sich das Flugzeug an der Position s=0. Es öffnet den Bremsfallschirm und beginnt den Bremsvorgang. Das Flugzeug besitzt eine Geschwindigkeit von 300km/h. Beachte: dieser Wert muss im Modell in m/s angegeben werden.

Erstellen Sie ein Simulink-Modell, das die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit im Intervall [0,12] berechnet und beide Größen in einem Scope-Block mit zwei Eingängen darstellt.

a) Lösung 1:

Das Simulink-Modell darf nur die Blöcke **Sum**, **Product**, **Constant**, **Gain**, **Integrator** (external Initial Condition) und **Scope** enthalten. Welche Werte müssen in den Constant-Blöcken und im Gain-Block eingetragen werden?

b) Lösung 2:

Das Simulink-Modell darf nur die Blöcke **Function-Block**, **Constant**, **Integrator** (external Initial Condition) und **Scope** enthalten. Welcher Wert muss im Constant-Block eingetragen werden? Geben Sie den Ausdruck an, der im Function-Block eingetragen werden muss. **Der zurückgelegte Weg muss nicht berechnet werden.**

c)

Berechnet man die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit mit Hilfe von **ode45**, dann muss man ein M-File bereitstellen, das die erste Ableitung berechnet. Schreiben Sie das entsprechende M-File für die obige Differentialgleichung.

d)

Wie lautet der Aufruf der Funktion **ode45** zur Berechnung der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit um das Anfangswertproblem in Zeitraum [0,12] zu lösen? Die Geschwindigkeit soll in einer Variablen v gespeichert werden.

Ingenieurinformatik

Numerik für Ingenieure

Name	Vorname	Semestergruppe	Hörsaal

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Summe

Studienbeginn vor WS13/14 (Kombinationsprüfung) **	☐
Studienbeginn ab WS13/14 bis WS15/16 **	☐
Studienbeginn ab SS16 (Kombinationsprüfung)	☐
Diplomstudiengang Maschinenbau**	☐

**** Die Prüfung ist nur dann gültig, wenn Sie die Zulassungsvoraussetzung erworben haben (erfolgreiche Teilnahme am Praktikum).**

Aufgabensteller: Dr. Reichl, Dr. Küpper und Kollegen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Hilfsmittel:
- **Taschenrechner nicht zugelassen**
- **PC/Notebook nicht zugelassen**
- **Sonstige eigene Hilfsmittel sind erlaubt**
- **Bearbeitung mit Bleistift ist erlaubt**

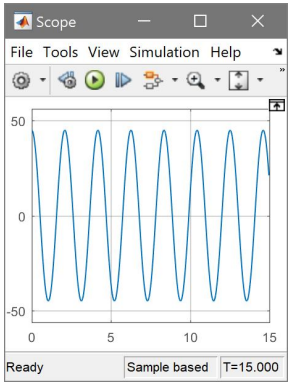
****** Viel Erfolg!!! ******

Aufgabe 5: (ca. 9 Punkte)

Ein Pendel ist zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ um den Winkel $\varphi(0) = 45°$ ausgelenkt und befindet sich zunächst in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ wird das Pendel losgelassen. Die Auslenkung $\varphi(t)$ des Pendels soll im Zeitintervall $t = 0 \ldots 15\,\text{s}$ berechnet und wie in der Abbildung gezeigt grafisch dargestellt werden.

Es gilt die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\varphi) = 0 \quad \text{mit} \quad g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{und} \quad L = 1{,}0\,\text{m}$$



5.1. Zeichnen Sie ein Simulink-Modell zur Lösung dieser Differentialgleichung mit den angegebenen Anfangsbedingungen. Notieren Sie in Ihrer Zeichnung ggf. auch die Parameter, die ggf. bei den von Ihnen ausgewählten Blöcken eingestellt werden müssen.

Führen Sie die die Berechnung im Bogenmaß durch und rechnen Sie den Winkel $\varphi(t)$ erst unmittelbar vor der Darstellung im Scope-Block in Grad um!

5.2. Die Differentialgleichung soll für das Zeitintervall $t = 0 \ldots 15\,\text{s}$ gelöst werden. Wo wird dieses Zeitintervall eingestellt?

Aufgabe 1: (ca. 15 Punkte)

Das abgebildete C-Programm dient zur numerischen Berechnung des folgenden Integrals:

$$Y = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

```
/* Vereinfachtes, nicht optimiertes (!) Trapezverfahren */
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double trapez(double a, double b);
double f(double x);

int main(void)
{
    double a, b, Y;
    printf("Integration von a = "); scanf("%lf", &a);
    printf("Integration bis b = "); scanf("%lf", &b);
    Y = trapez(a, b);
    printf("Integral = %f\n", Y);
    return 0;
}

double trapez(double a, double b)
{
    int i, anz_flaechen = 1000;
    double Y = 0, dx = (b - a) / anz_flaechen;
    for(i = 0; i < anz_flaechen; ++i)
        Y += (f(a + i * dx) + f(a + (i + 1) * dx)) * dx / 2;
    return Y;
}

double f(double x)
{
    return sin(x) * cos(x);
}
```

1.1. Wie lautet die Funktion $f(x)$, die in dem abgebildeten Quelltext fest einprogrammiert ist?

$f(x) =$

1.2. Zur numerischen Integration wird das sog. Trapezverfahren eingesetzt. Das zu berechnende Integral wird durch eine große Anzahl von Trapezflächen angenähert, die alle aufsummiert werden. Welche Anzahl ist im C-Quelltext fest einprogrammiert?

Anzahl =

1.3. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion „trapez“ zur numerischen Integration, deren Aufbau der abgebildeten C-Funktion bis auf den folgenden Unterschied entspricht:

In der MATLAB-Funktion „trapez“ soll die zu integrierende Funktion $f(x)$ nicht fest einprogrammiert sein. Stattdessen wird die zu integrierende Funktion $f(x)$ beim Funktionsaufruf mittels Function-Handle übergeben (Übergabeparameter „fun“ zusätzlich zu den beiden Parametern „a“ und „b“ aus der C-Funktion).

Lösung zu Aufgabe 1.3:

1.4. Schreiben Sie ein MATLAB-Skript zum Aufruf der in 1.3 programmierten Funktion „trapez“. Es soll das folgende Integral berechnet und das Ergebnis Y auf dem Bildschirm ausgegeben werden:

$$Y = \int_0^{10} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2: (ca. 12 Punkte)

Gegeben seien die Matrix A sowie die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1. A hat reelle Eigenwerte und Eigenvektoren. Zeigen Sie durch eine kurze Berechnung, welche der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ Eigenvektoren von A sind (Berechnungsschritte aufschreiben!).

Wie lautet jeweils der dazugehörende Eigenwert?

2.2. Schreiben Sie ein MATLAB-Skript zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der oben angegebenen Matrix A. Die Matrix hat reelle Eigenwerte und Eigenvektoren, komplexe Ergebnisse müssen daher nicht berücksichtigt werden. Die Ausgabe soll in dem folgenden Format erfolgen:

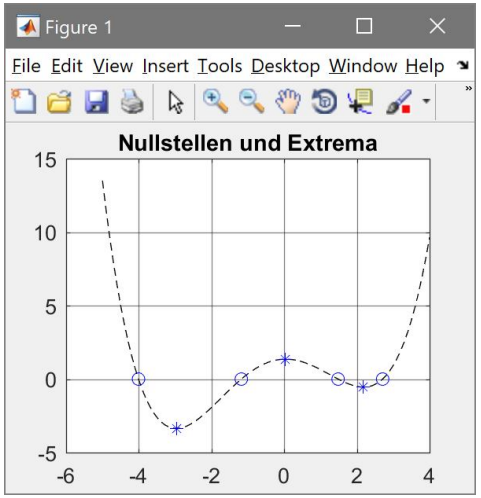
```
1. Eigenwert: 6.000, Eigenvektor: (0.000, 1.000)
2. Eigenwert: 3.000, Eigenvektor: (0.316, 0.949)
```


Aufgabe 3: (ca. 14 Punkte)

Schreiben Sie ein MATLAB-Skript zur grafischen Darstellung des folgenden Polynoms (so wie in der Abbildung gezeigt):

$$f(x) = \frac{1}{14}(x^4 + x^3 - 13x^2 + x + 19)$$

- Die x-Werte liegen im Bereich $-5 \ldots 4$.
- Das Polynom wird in schwarzer Farbe gestrichelt dargestellt. (**)
- Die vier Nullstellen des Polynoms werden durch blaue Kreise markiert.
- Die drei Extremwerte (ein Hochpunkt, zwei Tiefpunkte) werden durch blaue Sterne markiert.
- Beachten Sie, dass sowohl ein Titel als auch Gitterlinien ausgegeben werden.



(**) Der Abstand der x-Werte ist ausreichend fein zu wählen, sodass der Verlauf der Funktion $f(x)$ ohne „Ecken und Kanten“ gezeichnet wird.

Aufgabe 4: (ca. 17 Punkte)

Die folgende Differentialgleichung soll im Intervall $t = 1 \ldots 1{,}5$ numerisch gelöst werden:

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = \frac{e^{3t}}{t^2}$$

Für die Anfangswerte bei $t = 1$ gilt:

$$x(1) = 1 \qquad \dot{x}(1) = 1$$

4.1. Wandeln Sie die oben angegebene Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung um. Wie lauten die dazugehörigen Anfangsbedingungen?

4.2. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion mit dem Namen „a4_dgl“ zur Definition des Differentialgleichungssystems.

4.3. Schreiben Sie ein MATLAB-Skript mit dem Namen „a4_scr“ zur Lösung des Differentialgleichungssystems im Intervall $t = 1 \ldots 1{,}5$. Es soll das Lösungsverfahren „ode45“ verwendet werden.

Anschließend werden die Werte von t, x und $\dot{x}$ tabellarisch mit drei Nachkommastellen ausgegeben, die Schrittweite für t soll 0,02 betragen. (Achten Sie auch auf die Ausgabe der Überschrift.)

Command Window

t	x	dx/dt
1.000	1.000	1.000
1.020	1.024	1.365
1.040	1.055	1.781
1.060	1.095	2.252
1.080	1.145	2.785
1.100	1.207	3.386
1.120	1.281	[illegible]

Ingenieurinformatik

Numerik für Ingenieure

Name	Vorname	Semestergruppe	Hörsaal

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe	

Studienbeginn vor WS13/14 (Kombinationsprüfung) **	☐
Studienbeginn ab WS13/14 bis WS15/16 **	☐
Studienbeginn ab SS16 (Kombinationsprüfung)	☐
Diplomstudiengang Maschinenbau**	☐

**** Die Prüfung ist nur dann gültig, wenn Sie die Zulassungsvoraussetzung erworben haben (erfolgreiche Teilnahme am Praktikum).**

Aufgabensteller: Dr. Reichl, Dr. Küpper und Kollegen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Hilfsmittel:
- **Taschenrechner nicht zugelassen**
- **PC/Notebook nicht zugelassen**
- **Sonstige eigene Hilfsmittel sind erlaubt**
- **Bearbeitung mit Bleistift ist erlaubt**

****** Viel Erfolg!!! ******

Aufgabe 1: (ca. 21 Punkte)

1.1. Durch Aufruf der eingebauten MATLAB-Funktion **isprime(x)** kann überprüft werden, ob x eine Primzahl ist oder nicht:

- **isprime(13)** liefert als Rückgabewert eine 1, denn 13 ist eine Primzahl,
- **isprime(14)** liefert als Rückgabewert eine 0, denn 14 ist keine Primzahl.

Programmieren Sie eine eigene MATLAB-Funktion mit dem Namen **ist_prim(x)**, die dasselbe Ergebnis liefert wie die eingebaute Funktion **isprime(x)**: Falls x eine Primzahl ist, wird 1 zurückgegeben. Sonst wird 0 zurückgegeben.

Sie dürfen ohne weitere Überprüfung davon ausgehen, dass mit dem Parameter x eine positive ganze Zahl übergeben wird (also kein Vektor und auch keine Matrix, keine Zahl mit Nachkommastellen, keine negative Zahl oder null).

Hinweise: - Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist.

- Die eingebaute Funktion isprime(x) darf nicht verwendet werden!

1.2. Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, welches die ersten 100 Primzahlen ermittelt und hintereinander in dem Vektor **vec** speichert. Sie dürfen in Ihrem Skript die eingebaute Funktion **isprime(x)** oder die selbst erstellte Funktion **ist_prim(x)** verwenden.

```
% MATLAB-Skript zur Berechnung von 100 Primzahlen
vec = [];
```

```
% Ausgabe der 100 Primzahlen im Vektor "vec"
disp('Die ersten 100 Primzahlen sind: ')
disp(vec)
```

Aufgabe 2: (ca. 14 Punkte)

Die Variablen A und x sind mit den folgenden Werten belegt:

A = [-1 2; 2 -1];

x = [1; -1];

Wie lauten die Ausgaben der folgenden MATLAB-Befehle?

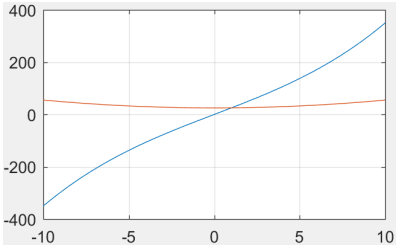
disp(x.*x)	(1 Pkt.)
disp(A.^3)	(2 Pkt.)
disp(A.*A)	(2 Pkt.)
disp(A*A)	(3 Pkt.)
disp(A*x)	(2 Pkt.)
disp((A*x)')	(1 Pkt.)
disp([x; x])	(1 Pkt.)
disp(A + [x x])	(2 Pkt.)

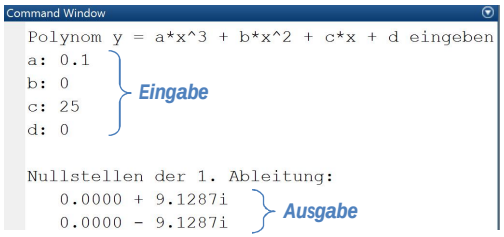
Aufgabe 3: (ca. 12 Punkte)

Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, welches die folgenden Aufgaben löst:

- Der Anwender gibt die Koeffizienten a, b, c, d des Polynoms $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ein.
- Das Polynom und seine 1. Ableitung werden im Bereich x = -10 ... +10 grafisch ausgegeben.
- Die beiden Nullstellen der 1. Ableitung werden (wie in der Abbildung gezeigt) im Command Window ausgegeben. Achtung: Die Nullstellen können auch komplex sein.

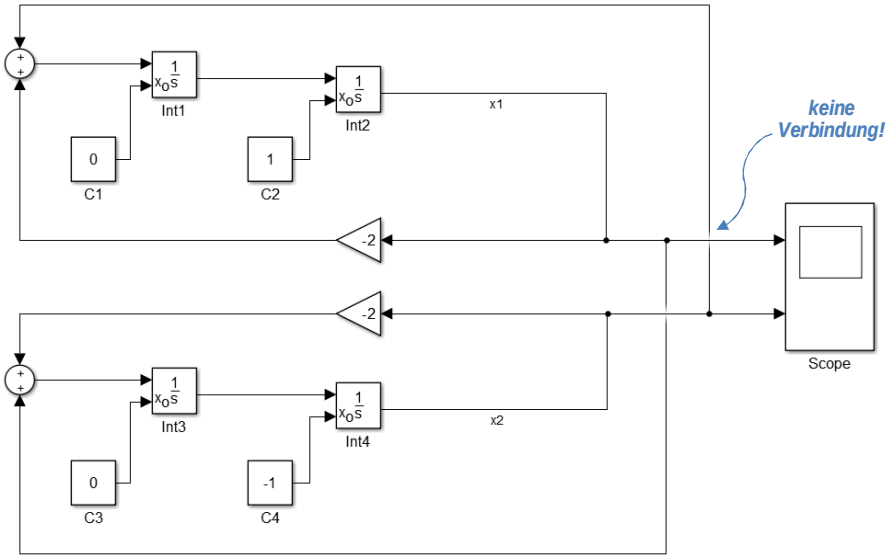
```
disp('Polynom y = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d eingeben')
```





Aufgabe 4: (ca. 20 Punkte)

Ein System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung wird mit Simulink gelöst.



4.1. Wie lauten die beiden Differentialgleichungen, die im Simulink-Modell definiert sind?

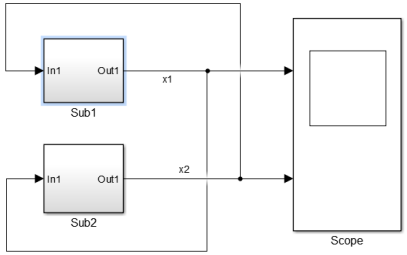
$\ddot{x}_1 =$

$\ddot{x}_2 =$

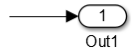
4.2. Wie lauten die Anfangsbedingungen dieser beiden Differentialgleichungen?

4.3. Das Differentialgleichungssystem soll für den Zeitraum $t = 0 \ldots 25\,\mathrm{s}$ numerisch gelöst werden. Wo wird dieser Zeitraum in Simulink eingestellt?

4.4. Zur Vereinfachung des Simulinkmodells werden zwei Subsysteme definiert:



Wie muss der innere Aufbau des Subsystems „Sub1“ aussehen, damit sich das Verhalten im Vergleich zum ursprünglichen System nicht verändert?



4.5. Das System von zwei Differentialgleichungen **2. Ordnung** aus Aufgabe 4.1. soll in MATLAB mittels ode45 gelöst werden. Dazu muss es zunächst in ein System von vier Differentialgleichungen **1. Ordnung** umgewandelt werden.

Wie lauten die vier Differentialgleichungen 1. Ordnung inkl. Anfangsbedingungen?

Ingenieurinformatik

Name	Vorname	Matrikelnummer	Sem.Gr.	Hörsaal	Platz

Zulassung geprüft

Punktezahl :

Note :

Studienbeginn vor WS13/14 (Kombinationsprüfung) **	☐
Studienbeginn ab WS13/14 bis WS15/16 **	☐
Studienbeginn ab SS16 (Kombinationsprüfung)	☐
Diplomstudiengang Maschinenbau**	☐

**** Die Prüfung ist nur dann gültig, wenn Sie die erforderliche Zulassungsvoraussetzung erworben haben(erfolgreiche Teilnahme am Praktikum).**

Aufgabensteller: Dr. Reichl, Dr. Küpper und Kollegen

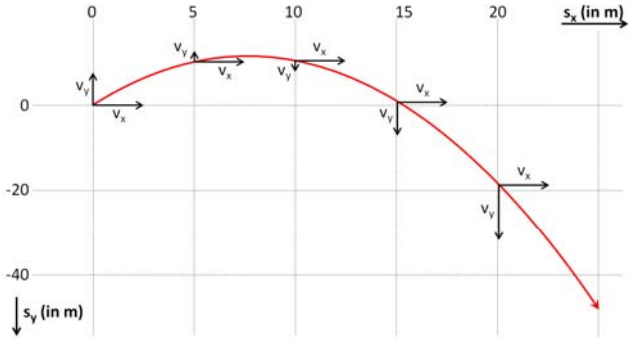
Anzahl der Aufgaben : 5

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Hilfsmittel:
- **Taschenrechner nicht zugelassen**
- **PC/Notebook nicht zugelassen**
- **Sonstige eigene Hilfsmittel sind erlaubt**
- **Bearbeitung mit Bleistift ist erlaubt**

Aufgabe 1: (ca. 21 Punkte)

Eine Kugel wird zum Zeitpunkt t = 0s schräg nach oben geworfen. Erstellen Sie ein MATLAB-Skript, welches die x- und y-Koordinaten der Flugbahn (s_x und s_y) in Zeitschritten von Δt berechnet und tabellarisch auf dem Bildschirm ausgibt.



1. Beim Start des Programms werden zuerst die Anfangsgeschwindigkeiten in x- und y-Richtung eingelesen. Dann wird der Wert für Δt eingelesen. Ist der Wert von Δt nicht größer als Null, wird erneut zur Eingabe aufgefordert, solange bis der Wert von Δt positiv ist (siehe Beispiel).
2. Zu Beginn (t = 0) ist die x-Komponente der Geschwindigkeit und die y-Komponente der Geschwindigkeit aufgrund der Eingabewerte bekannt. Die Kugel befindet sich zu Beginn an der Position $s_x = s_y = 0$.
3. Wenn die Koordinaten $s_x(t)$, $s_y(t)$ und die Geschwindigkeiten $v_x(t)$, $v_y(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t bekannt sind, können $s_x(t + \Delta t)$, $s_y(t + \Delta t)$ und $v_y(t + \Delta t)$ wie folgt berechnet werden:

   $s_x(t + \Delta t) = s_x + \Delta t \cdot v_x$

   $s_y(t + \Delta t) = s_y + \Delta t \cdot v_y$

   $v_y(t + \Delta t) = v_y - \Delta t \cdot g$ (mit $g = 9{,}81\ m/s^2$)

   Die Geschwindigkeitskomponente v_x ändert sich nicht.
4. Nach jedem Zeitschritt Δt werden die aktuellen Werte von t, s_x, s_y und der Betrag der Kugelgeschwindigkeit v mit zwei Nachkommastellen ausgegeben.
5. Die Berechnungs-Schleife wird solange ausgeführt, bis der Zeitpunkt t = 5s erreicht ist.
6. Vor dem Beenden des Programms wird der maximale Wert von s_y ausgegeben, der während des Programmablaufs aufgetreten ist.

```
Command Window
Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung: 5
Anfangsgeschwindigkeit in y-Richtung: 15
Schrittweite dt: -0.2
Schrittweite dt: 0.1
t = 0.10  sx =  0.50  sy =  1.50  v = 14.88
t = 0.20  sx =  1.00  sy =  2.90  v = 13.96
t = 0.30  sx =  1.50  sy =  4.21  v = 13.05
t = 0.40  sx =  2.00  sy =  5.41  v = 12.15
  . . .
t = 4.80  sx = 24.00  sy =-38.66  v = 32.48
t = 4.90  sx = 24.50  sy =-41.87  v = 33.44
t = 5.00  sx = 25.00  sy =-45.17  v = 34.42
sy_max=12.23
```

Aufgabe 2: (ca. 10 Punkte)

Das folgende MATLAB-Skript löst das Anfangswertproblem für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, die durch die Funktion **fdgl** festgelegt werden.

MATLAB-Skript :

```
[t, y] = ode45( @fdgl, [0,0.2], [0.5,0.2,0.1] )
```

Funktion fdgl :

```
function [ dy_dt ] = fdgl( t, y )

   dy_dt(1,1) = 2*y(1)*y(2) + 3*y(3);
   dy_dt(2,1) = y(1) + 4*exp(-2*t);
   dy_dt(3,1) = y(1) + 5*y(2)*sin(2*pi*t);

end
```

1. Für welchen Zeitraum wird die Lösung berechnet?

2. Wie lautet das System von Differentialgleichungen erster Ordnung, das durch fdgl.m beschrieben wird?

3. Wie lauten die Anfangsbedingungen für das Anfangswertproblem?

Aufgabe 3: (ca. 8 Punkte)

Gegeben ist ein Vektor x : $x = [\ 5 \quad 8 \quad -3 \quad \ldots\ ]$

Der Vektor x wird verwendet, um neue Größen zu berechnen. Geben Sie die MATLAB-Befehle an, um folgende Aufgaben zu lösen:

a) Erzeugen Sie einen Vektor y, dessen Elemente die Quadrate der Elemente von x sind, d.h. $y = [\ 25 \quad 64 \quad 9 \quad \ldots\ ]$

b) Erzeugen Sie einen Vektor y, dessen Elemente die Kehrwerte der Elemente von x sind, d.h. $y = [\ 1/5 \quad 1/8 \quad -1/3 \quad \ldots\ ]$

c) Berechnen und speichern Sie den Mittelwert der Elemente von x in der Variablen y.

d) Beschreiben Sie in Worten, was die folgende Anweisung macht.

```
y = x(end)
```

e) Beschreiben Sie in Worten, was die folgende Anweisung macht.

```
x(:)= 1
```

f) Beschreiben Sie in Worten, was die folgende Anweisung macht.

```
x = 1
```

g) Ersetzen Sie im Vektor x alle Elemente mit ungeraden index durch -1, d.h. aus $x = [\ 5 \quad 8 \quad -3 \quad \ldots\ ]$ soll der Vektor $x = [\ -1 \quad 8 \quad -1 \quad \ldots\ ]$ erzeugt werden.

Aufgabe 4: (ca. 18 Punkte)

Das folgende System von Differentialgleichungen 1. Ordnung wird mit Hilfe von Simulink gelöst.

$$\dot{y}_1(t) = 0.1 \cdot y_1(t) + 0.02 \cdot y_1(t) \cdot y_2(t) \qquad y_1(t=0) = 0.15$$
$$\dot{y}_2(t) = 0.3 \cdot y_2(t) + 0.02 \cdot y_1(t) \cdot y_2(t) + 3 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \qquad y_2(t=0) = 0.25$$

Die Anfangswerte zur Zeit t=0 sind vorgegeben. Die Lösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ werden in einem Scope-Block mit **zwei Teilfenstern** graphisch dargestellt.

a) Zeichnen Sie das entsprechende Simulink-Modell auf der folgenden Seite.
Im Simulink-Modell dürfen nur folgende Blöcke verwendet werden:
- **Gain**- und **Constant**-Blöcke
- **Product**- und **Add**-Blöcke
- **Integrator**-Blöcke mit „Initial condition source : external"
- **Sine Wave**-Block
- **Scope**-Block

Tragen Sie auch die Werte für die Anfangsbedingungen und die Faktoren in den Gain-Blöcken ein.

b) Was muss im Sinus-Block bei Frequenz und Phase eingetragen werden, um folgende Bedingungen zu erzeugen?
- die Frequenz ω wird so gewählt, dass der Sinus-Block pro Zeiteinheit 4 Schwingungen erzeugt, d.h. im Zeitintervall [0, 1] erzeugt der Sinus-Block 4 Schwingungen
- die Phase φ einem Winkel von 40 Grad entspricht

Phase (rad):	
Frequency (rad/sec):	

Aufgabe 5: (ca. 10 Punkte)

Mit Hilfe der Linksdivision kann das Gleichungssystem

```
A * x = b
```

einfach gelöst werden. Es gilt

```
x = A \ b
```

Multipliziert man die berechnete Lösung **x** mit der Matrix **A** erhält man einen Vektor **b1**, der **praktisch identisch** mit dem Vektor **b** ist. Aufgrund von Rundungsfehlern ist aber **b1** nicht identisch mit **b**. Es kann kleine Abweichungen geben. Ergänzen Sie das MATLAB-Skript so, dass ausgegeben wird, bei welchem Index die betragsmäßig größte Abweichung zwischen den beiden Vektoren **b** und **b1** auftritt. Das Ergebnis soll wie folgt ausgegeben werden:

```
Größte Abweichung:  Index = 3  Differenz 4.21e-16
```

Diese Ausgabe bedeutet, dass die betragsmäßig größte Abweichung bei der dritten Komponente der beiden Vektoren auftritt. Die Differenz beträgt $4.21*10^{-16}$.

Die Matrix **A** und der Vektor **b** sind bereits mit Werten belegt. Ergänzen Sie die MATLAB-Anweisungen um die beschriebene Aufgabe zu lösen.

```
x = A\b
```

***** *Viel Erfolg!!!* *****

Ingenieurinformatik

Name	Vorname	Matrikelnummer	Sem.Gr.	Hörsaal	Platz

Zulassung geprüft

Punktezahl :

Note :

Studienbeginn vor WS13/14 (Kombinationsprüfung) **	☐
Studienbeginn ab WS13/14 bis WS15/16 **	☐
Studienbeginn ab SS16 (Kombinationsprüfung)	☐
Diplomstudiengang Maschinenbau**	☐

**** Die Prüfung ist nur dann gültig, wenn Sie die erforderliche Zulassungsvoraussetzung erworben haben(erfolgreiche Teilnahme am Praktikum).**

Aufgabensteller: Dr. Reichl, Dr. Küpper und Kollegen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Hilfsmittel:
- **Taschenrechner nicht zugelassen**
- **PC/Notebook nicht zugelassen**
- **Sonstige eigene Hilfsmittel sind erlaubt**
- **Bearbeitung mit Bleistift ist erlaubt**

Aufgabe 1: (ca. 15 Punkte)

Gegeben ist die C-Funktion **sortiere**, die die Elemente eines Vektors der Größe nach ordnet (Bubble-Sort-Algorithmus).

Der **Vektor x** wird als Parameter übergeben. Die Anzahl der Elemente des Vektors wird im Parameter n übergeben.

Schreiben Sie die C-Funktion in eine MATLAB-Funktion um. Der Ablauf der MATLAB-Funktion soll der C-Funktion entsprechen (die MATLAB-Funktion sort darf nicht verwendet werden). Die MATLAB-Funktion besitzt als Aufrufparameter nur den Vektor x und gibt den **sortierten Vektor zurück**. Verwenden Sie nur Variablen vom Typ **double**.

```
void sortiere(double x[], int n)
{
 int i, sortiert;
 double hilf;
 while (1 == 1)
 {
  sortiert = 1;  /*Annahme: Werte sortiert*/
  for (i=1; i<n; i++)
  {
    if ( x[i-1] > x[i] )
    {
      hilf = x[i];  /*tausche x[i], x[i-1]*/
      x[i] = x[i-1];
      x[i-1] = hilf;
      sortiert = 0;     /* nicht sortiert */
    }
  }
  if (sortiert == 1)
  {
      break;       /* Vektor ist sortiert */
  }
 }
}
```

Aufgabe 2: (ca. 9 Punkte)

Gegeben ist das nebenstehende Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Lösen Sie das Anfangswertproblem für diese Differentialgleichungen mit Hilfe von ode45.

$$\dot{y}_1(t) = 2 \cdot y_2(t) + y_3(t)$$
$$\dot{y}_2(t) = y_1(t) + 3 \cdot y_2(t) \cdot y_3(t)$$
$$\dot{y}_3(t) = y_2(t) + 4 \cdot y_3(t) + \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$$

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion **fdgl**, die die ersten Ableitungen berechnet.

b) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, das die Lösung des Anfangswertproblems im Intervall [0, 0.2] mit dem Verfahren **ode45** berechnet. Die Anfangsbedingungen lauten :

$y_1(t=0) = 0.2 \quad y_2(t=0) = 0.3 \quad y_3(t=0) = 0.4$

Geben Sie die Werte von $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ zur Zeit t=0.2 aus.

Aufgabe 3: (ca. 23 Punkte)

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion **tabelle**, an die ein Polynom übergeben wird. Die Funktion tabelle berechnet das Integral des Polynoms im Intervall [0,b]. Die Werte für b laufen von 0.0 bis 1.0 in einer Schrittweite von 0.01. Die Funktion gibt jeweils den Wert von b und den Wert des Integrals aus. Die Ausgabe soll wie rechts gezeigt erscheinen :

obere Grenze	Integral
0.00	0.0000e+00
0.01	-1.9700e-02
0.02	-3.8800e-02
. . .	. . .
0.99	1.2485e+00
1.00	1.3000e+00

Weiterhin bestimmt die Funktion den kleinsten Wert des Integral, der in der Tabelle ausgegeben wird und gibt diesen Wert zusammen mit dem zugehörigen Wert von b zurück.

Beachte : Die Überschrift der Tabelle muss ausgegeben werden. Für die Werte der Integrale wird die Exponentialdarstellung verwendet.

b) Rufen Sie die Funktion **tabelle** für folgendes Polynom

$$y(x) = 1.2 \cdot x^3 + 6 \cdot x - 2$$

in einem MATLAB-Skript auf. Geben Sie das Ergebnis des Funktionsaufrufs wie folgt aus.

```
Minimum b=0.33 y=-0.329742
```

Erstellen Sie das zugehörige MATLAB-Skript :

Aufgabe 4: (ca. 7 Punkte)

Gegeben sind die beiden Vektoren x und y. $x = [2 \quad 3]$ $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Mit Hilfe dieser zwei Vektoren werden die Größen z1, z2, z3, z4, z5 und z6 berechnet. Geben Sie die Werte für diese Variablen an.

a) `z1 = x * y`

b) `z2 = x + y'`

c) `z3 = x .* y'`

d) `z4 = mean(y)`

e) `z5 = polyint(x)`

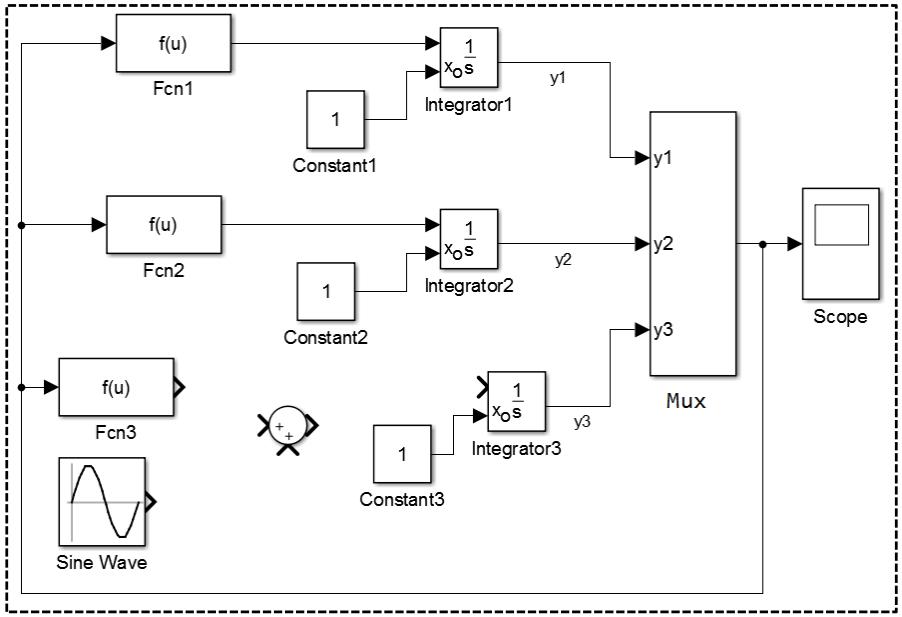
f) `z6 = polyder(x)`

Aufgabe 5: (ca. 13 Punkte)

Das folgende System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit vorgegebenen Anfangswerten

$$\dot{y}_1(t) = 2 \cdot y_2(t) + y_3(t) \qquad y_1(t=0) = 0.2$$
$$\dot{y}_2(t) = y_1(t) + 3 \cdot y_2(t) \cdot y_3(t) \qquad y_2(t=0) = 0.3$$
$$\dot{y}_3(t) = y_2(t) + 4 \cdot y_3(t) + 1.2 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot t) \qquad y_3(t=0) = 0.4$$

wird mit Hilfe von Simulink gelöst.



a) Ergänzen Sie die fehlenden Signalverbindungen am Add-Block, damit die Differentialgleichung gelöst wird.

b) Was muss in den Constant-Blöcken eingetragen werden?

Constant1	
Constant2	
Constant3	

c) Was muss in den Function-Blöcken eingetragen werden?

Fcn1	
Fcn2	
Fcn3	

d) Was muss im Sinusblock eingetragen werden?

Sine Wave	

e) Beschreiben Sie, was im Scope-Block angezeigt wird?

***** *Viel Erfolg!!!* *****

Ingenieurinformatik

Name	Vorname	Matrikelnummer	Sem.Gr.	Hörsaal	Platz

Zulassung geprüft

Note :

Die Prüfung ist nur dann gültig, wenn Sie die erforderliche Zulassungsvoraussetzung erworben haben (erfolgreiche Teilnahme am Praktikum). Dies wird vom Aufgabensteller überprüft.

Bachelor-Studiengang : neue SPO	☐
Bachelor-Studiengang : alte SPO (Kombinationsprüfung)	☐
Diplomstudiengang :	☐

Aufgabensteller: Dr. Reichl, Dr. Küpper und Kollegen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Hilfsmittel:
- **Taschenrechner nicht zugelassen**
- **PC/Notebook nicht zugelassen**
- **Sonstige eigene Hilfsmittel sind erlaubt**
- **Bearbeitung mit Bleistift ist erlaubt**

Aufgabe 1: (ca. 15 Punkte)

Gegeben sind die beiden Vektoren x und y

```
x = [ 2  3 ]
y = [ 4  5 ]
```

Mit Hilfe dieser zwei Vektoren werden die Größen z1, z2, z3 und z4 berechnet. Geben Sie die Werte für diese Variablen an.

a) `z1 = x*y'`

b) `z2 = x.*y`

c) `z3 = sum([ x, y ])`

d) `z4 = x./y`

Mit Hilfe der Matlab-Funktion **eig** werden die Eigenwerte und die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix A berechnet.

```
[ V, D ] = eig(A)
```

e) Berechnen Sie mit Hilfe der Werte von D die Determinante von A. Die Matlab-Funktion **det** darf nicht verwendet werden.

f) Geben Sie einen Matlab-Ausdruck an, der das Skalarprodukt des 2-ten und 3-ten Eigenvektors berechnet.

g) Geben Sie einen Matlab-Ausdruck an, der den Betrag (Länge) des 2-ten Eigenvektors berechnet.

Aufgabe 2: (ca. 22 Punkte)

a) Schreiben Sie eine Funktion **equal**, an die zwei Werte vom Typ double übergeben werden und die überprüft, ob die beiden Zahlen „annähernd gleich" sind. Zwei Zahlen sollen annähernd gleich sein, wenn sich die beiden Zahlen um weniger als 0.0001 unterscheiden. Unterscheiden sich die beiden Zahlen um weniger als 0.0001, dann gibt die Funktion den Wert **true** zurück, ansonsten den Wert **false**.

b) Schreiben Sie eine Funktion **drehwinkel**, die überprüft, ob eine 2*2-Matrix A, die als Parameter übergeben wird, eine Drehung in der Ebene um einen Winkel zwischen 0° und 90° (Grenzen eingeschlossen) beschreibt. Ist dies der Fall, dann wird der Drehwinkel in Grad berechnet und zurückgegeben, andernfalls der Wert -1.

Eine Drehung in der Ebene um den Winkel w wird durch folgende Matrix beschrieben. Für w=30° ergibt sich daraus die rechts stehende Matrix.

$$\begin{pmatrix} \cos(w) & -\sin(w) \\ \sin(w) & \cos(w) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0.866 & -0.500 \\ 0.500 & 0.866 \end{pmatrix}$$

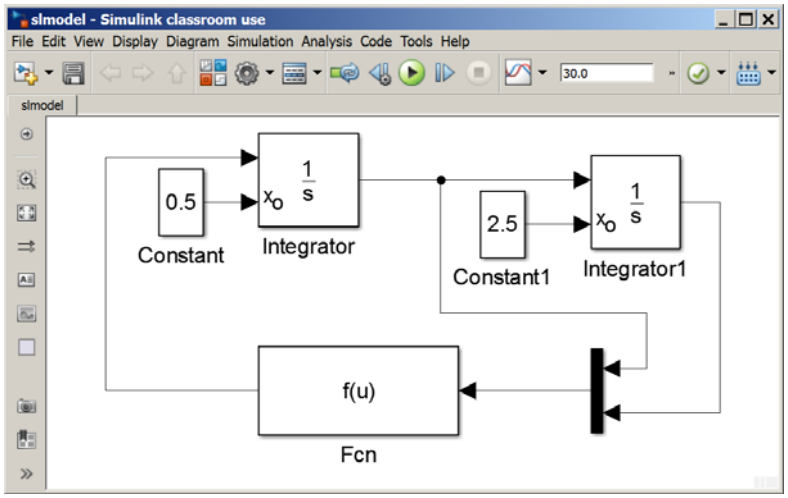
Hinweise :

- Sie dürfen annehmen, dass es sich bei der übergebenen Matrix um eine 2*2 Matrix handelt. Sie müssen also nicht prüfen, dass die Matrix A tatsächlich eine 2*2 Matrix ist.
- Zur Lösung der Aufgabe müssen einzelne Elemente der Matrix miteinander verglichen werden. Verwenden Sie hierzu die Funktion **equal** aus Aufgabe 3a. Für den Vergleich von zwei Zahlen dürfen die Operatoren == und ~= nicht verwendet werden.
- Die Umkehrfunktionen für **sind** und **cosd** heißen **asind** und **acosd**.
  So ergibt z.B. **asind(0.5)** den Wert 30.
  Vor dem Aufruf der Umkehrfunktionen **sind** und **cosd** muss jeweils geprüft werden, dass der Parameter, der übergeben wird, einen Betrag kleiner gleich 1 besitzt.

Aufgabe 3: (ca. 14 Punkte)

Das nachfolgende Simulink-Blockschaltbild beschreibt die Lösung für das Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Der Block **Fcn** enthält dabei den folgenden Ausdruck:

```
-0.1*u(1)-2*u(2)-0.01*u(2)^3
```

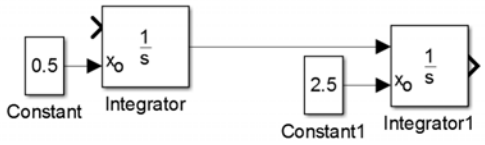


a) Geben Sie die Differentialgleichung 2-ter Ordnung an, die durch das obige Simulink-Modell beschrieben wird.

b) Geben Sie die Anfangsbedingungen für die Differentialgleichung an.

c) Wenn das obige Simulink-Modell gestartet wird, für welchen Zeitraum wird dann die Lösung berechnet?

d) Ergänzen Sie das nachfolgende Simulink-Modell so, dass die gleiche Differentialgleichung wie anfangs gelöst wird. Es dürfen aber nur Gain-Blöcke, Additions-Blöcke und Multiplikationsblöcke verwendet werden. Die Additions- und die Multiplikationsblöcke dürfen auch mehr als zwei Eingangsgrößen enthalten. Tragen Sie in den Gain-Blöcken die entsprechenden Faktoren ein.



Aufgabe 4: (ca. 16 Punkte)

Mit Hilfe der Funktionen **ode45** und **fdgl** wird das Anfangswertproblem einer Differential-gleichung 4-ter Ordnung im Zeitintervall [0,20] mit der Anfangsbedingung y0 gelöst.

```
[t,y] = ode45(@fdgl,[0,20],y0)
```

Die Ergebnisse sind in den Variablen **t** und **y** gespeichert.

a) Wie viele Spalten besitzt die Matrix y ?

b) Schreiben Sie Matlab-Anweisungen, die ausgeben, wie viele Elemente der Vektor **t** besitzt. Bestimmen Sie den größten Zeitabstand, für den zwei aufeinanderfolgende Werte von **y** berechnet worden sind. Geben den maximalen Wert der ersten Ableitung aus. Die Ausgabe soll wie folgt erscheinen, d.h. Anzahl ohne Nachkommastellen, die beiden anderen Werte in der Exponentialdarstellung mit je 3 Nachkommastellen.

```
Anzahl der Zeitschritte :  229
Maximaler Zeitschritt :  1.076e-01
Maximaler Wert der 1-ten Ableitung : 3.554e+00
```

c) Geben Sie einen Matlab-Ausdruck an, mit dem die erste Ableitung über der Zeit gezeichnet wird.

***** *Viel Erfolg!!!* *****