Differentialgleichungen erster Ordnung, Eulerverfahren

1. Differentialgleichung vorbereiten

Ableitung auf die linke Seite bringen, die Gleichung hat nun die Form:

$$\dot{y} = f(y, t)$$

Die Veränderliche muss natürlich nicht immer y heißen. Und bei vielen Differentialgleichungen ist auf der rechten Seite auch keine Abhängigkeit vom Zeitpunkt t gegeben.

Beispiel 1, Entladevorgang eines Kondensators:

$$\dot{u}_\mathrm{C} = -\frac{1}{RC} \cdot u_\mathrm{C}$$

Beispiel 2, Spannung eines Kondensators, der über einen Widerstand an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen ist:

$$\dot{u}_\mathrm{C} = \frac{\hat{u}}{RC} \cdot \sin \omega t - \frac{1}{RC} \cdot u_\mathrm{C}$$

Beispiel 3, Lastwagen fährt eine Steigung hinauf:

$$\dot{v} = \frac{P_\mathrm{Rad}}{mv} - g \cdot \sin \alpha$$

2. Eulerverfahren

Ausgangspunkt für das Eulerverfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen ist die folgende Näherung (für kleine Zeitschritte Δt):

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta y \approx \dot{y} \cdot \Delta t$$

Wenn der Funktionswert $y(t_0)$ und dessen Ableitung $\dot{y}(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 beide bekannt sind, kann damit der Funktionswert $y(t_0 + \Delta t)$ zum neuen Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ näherungsweise berechnet werden:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \Delta y \approx y(t_0) + \dot{y}(t_0) \cdot \Delta t$$

Wenn zum neuen Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ nicht nur der Funktionswert $y(t_0 + \Delta t)$ bekannt wäre sondern zusätzlich auch dessen Ableitung $\dot{y}(t_0 + \Delta t)$, dann könnte das Eulerverfahren fortgesetzt und somit der Verlauf von $y(t)$ über einen größeren Zeitraum hinweg näherungsweise berechnet werden.

Die gute Nachricht: Zu einem Funktionswert $y(t)$ kann die Ableitung $\dot{y}(t)$ zum selben Zeitpunkt sehr leicht angegeben werden. Und zwar über die Differentialgleichung (s. o.):

$$\dot{y} = f(y, t)$$