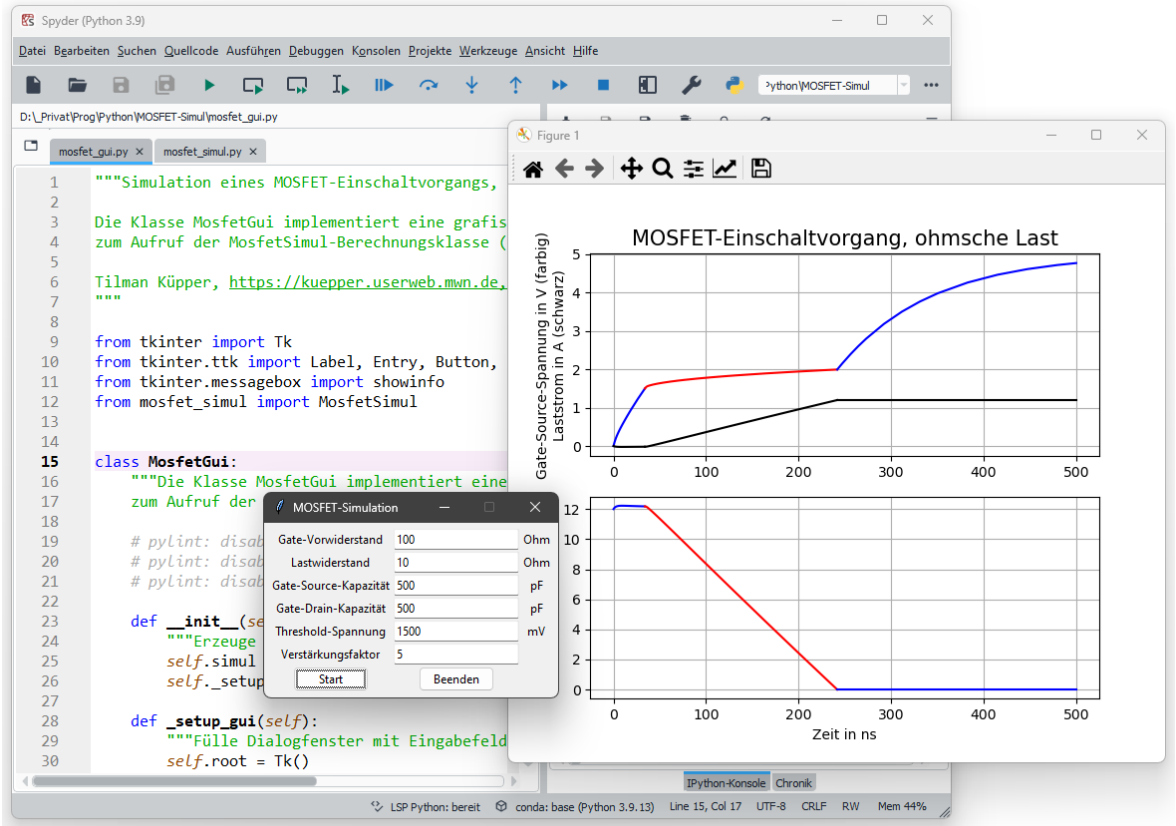
Tilman Küpper

Python-Programmierung

Aufgaben, Lösungen und eine Einführung in NumPy und SciPy



Hochschule München
https://kuepper.userweb.mwn.de/

Vorwort

Diese Aufgabensammlung ist aus Lehrveranstaltungen an der Fakultät Maschinenbau, Fahrzeugtechnik, Flugzeugtechnik der Hochschule München hervorgegangen. Die Studierenden erlernen hier zu Beginn ihres Ingenieurstudiums die Grundlagen der Python-Programmierung.

Die einzelnen Kapitel der Aufgabensammlung entsprechen in Inhalt und Niveau den Rechnerübungen, die während des Semesters stattfinden. Zu allen Aufgaben sind Lösungsvorschläge angegeben, nicht jedoch zu den Zusatzaufgaben. Es wird ausdrücklich empfohlen, diese Zusatzaufgaben selbstständig zu bearbeiten.

Seit Anfang 2025 umfasst diese Aufgabensammlung auch eine kurze Einführung in NumPy und SciPy. Ein neu hinzugefügter Anhang zeigt, wie typische Berechnungen aus dem zweiten Semester, die dort bislang in Matlab erfolgen, effizient mit Python umgesetzt werden können.

Die Aufgabensammlung wird fortlaufend weiterentwickelt und ergänzt. Die jeweils aktuelle Version der Aufgabensammlung kann von der Homepage des Autors heruntergeladen werden: https://kuepper.userweb.mwn.de/

Haben Sie Fehler oder Unklarheiten gefunden? Haben Sie Anregungen zu Form oder Inhalt? Dann melden Sie sich bitte bei: tilman.kuepper@hm.edu

München, 25. April 2025

Tilman Küpper

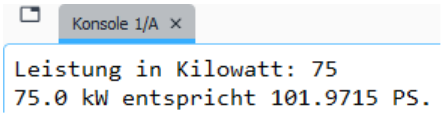
Inhaltsverzeichnis

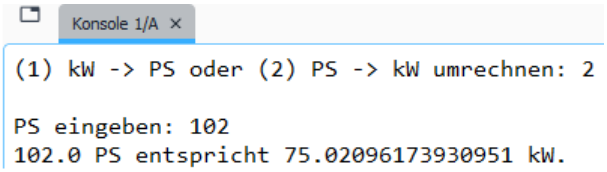
1 Grundlagen

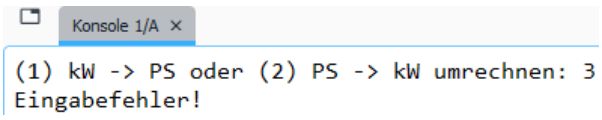
1.1 Umrechnung von kW nach PS

Programmieren Sie ein Python-Skript zur Umrechnung von Leistungsangaben in kW (Kilowatt) nach PS. Das Skript soll so ablaufen, wie im Bildschirmfoto (links) gezeigt.

Hinweis: 1 kW entspricht 1,35962 PS.







Zusatzaufgabe

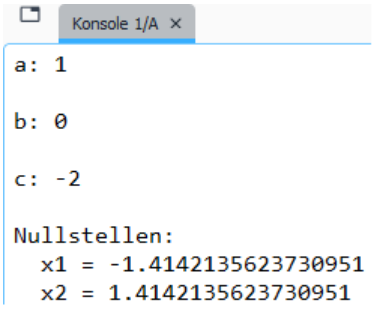
- Erweitern Sie das von Ihnen programmierte Skript: Nach dem Start wird zunächst gefragt, ob eine Umrechnung von kW nach PS oder von PS nach kW gewünscht ist (Bildschirmfoto, rechts).
- Bei einer ungültigen Eingabe wird eine entsprechende Fehlermeldung ausgegeben (Bildschirmfoto, unten).

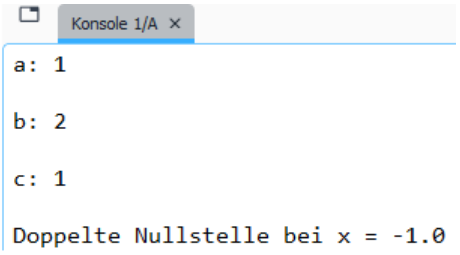
1.2 Mitternachtsformel

Programmieren Sie ein Skript, das die Nullstellen quadratischer Gleichungen berechnet und auf dem Bildschirm ausgibt:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

- Zur Berechnung der Nullstellen nutzen Sie die sog. Mitternachtsformel.
- Nach Eingabe der Koeffizienten a, b und c werden beide Nullstellen x_1 und x_2 berechnet und ausgegeben (Bildschirmfoto, links).
- Welche Ergebnisse erwarten Sie für $a = 1$, $b = 0$ und $c = 1$?
- Falls keine reellen Nullstellen existieren, soll die Meldung „keine reellen Nullstellen“ ausgegeben werden.





Zusatzaufgabe

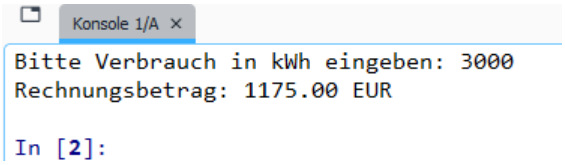
Bei doppelten Nullstellen soll eine Ausgabe in der Form „doppelte Nullstelle bei x = -1.0“ erfolgen (Bildschirmfoto, rechts).

2 Verzweigungen

2.1 Stromrechnung

Programmieren Sie ein Skript zur Erstellung einer Stromrechnung. Nach Eingabe des Verbrauchs in kWh berechnet das Skript den zu zahlenden Rechnungsbetrag und gibt ihn mit zwei Nachkommastellen auf dem Bildschirm aus:

- Für die ersten 2500 kWh beträgt der Preis 0,40 € pro kWh,
- für die nächsten 2500 kWh beträgt der Preis 0,35 € pro kWh,
- oberhalb von 5000 kWh beträgt der Preis 0,30 € pro kWh.



Beispiel, Verbrauch von 3000 kWh: $P = 2500 \cdot 0{,}40\,€ + 500 \cdot 0{,}35\,€ = 1175{,}00\,€$

Zusatzaufgabe

- Fragen Sie nach der Ausgabe des Rechnungsbetrags, ob eine weitere Berechnung erfolgen soll (Eingabe: 1) oder nicht (Eingabe: 0).
- Programmieren Sie auch die umgekehrte Berechnung: Nach der Eingabe eines Preises in € wird der dazugehörige Verbrauch in kWh auf dem Bildschirm ausgegeben.

2.2 Maximum und Median

Das folgende Python-Skript schreibt das Maximum von a und b in die Variable maxi.

```
a = int(input("a eingeben: "))
b = int(input("b eingeben: "))

if a > b:
    maxi = a
else:
    maxi = b

print(f"Das Maximum ist: {maxi}")
```

Erweitern Sie das Skript so, dass nun drei Werte a, b und c eingegeben werden. Das Maximum soll wiederum in die Variable maxi übertragen und ausgegeben werden.

Zusatzaufgabe

Geben Sie zusätzlich zum Maximum von a, b und c auch den Median aus.

2.3 Body-Mass-Index

Erstellen Sie ein Python-Skript, welches aus Körpermasse m in kg („Gewicht“) und Körpergröße l in m den sog. Body-Mass-Index berechnet:

$$\text{BMI} = m/l^2 \tag{2.1}$$

Geben Sie zusätzlich zum berechneten Body-Mass-Index aus, ob es sich dabei um Untergewicht, Normalgewicht, leichtes Übergewicht oder Übergewicht handelt:

BMI < 20	Untergewicht
20 ≤ BMI < 25	Normalgewicht
25 ≤ BMI < 30	Leichtes Übergewicht
30 ≤ BMI	Übergewicht

Zusatzaufgabe

- Programmieren Sie die Verzweigungen auf unterschiedliche Arten, etwa mit verschachtelten if-else-Anweisungen oder mit einer Kette von elif-Anweisungen.
- Zeichnen Sie die Struktogramme zu Ihren Lösungen.

2.4 ICAO-Standardatmosphäre

Die ICAO-Standardatmosphäre wird bei der Konstruktion, Berechnung und Prüfung von Luftfahrzeugen sowie bei der Verarbeitung von Daten aus geophysikalischen und meteorologischen Beobachtungen genutzt. Sie beschreibt den Temperatur- und Druckverlauf in unterschiedlichen Höhen, wobei zwischen den in der Tabelle angegebenen Werten linear interpoliert wird.[1]

Geopot. Höhe in km	-5	0	11	20	32	47	51	71	80
Temperatur in °C	47,5	15,0	-56,5	-56,5	-44,5	-2,5	-2,5	-58,5	-76,5

Programmieren Sie ein Skript zur Berechnung der Temperatur in einer bestimmten Höhe (Bildschirmfoto, links):

- Zunächst wird die Höhe (in Metern) eingegeben. Bei einer negativen Höhe oder einer Höhe > 47000 m erfolgt eine Fehlermeldung, ansonsten wird die Temperatur anhand der ICAO-Standardatmosphäre berechnet und ausgegeben.
- Die in der Tabelle angegebenen Werte für Höhen unterhalb von 0 m bzw. oberhalb von 47000 m werden in dieser Aufgabe also nicht berücksichtigt.

```
Konsole 1/A ×
Bitte Höhe in m eingeben: 4125
Die Temperatur beträgt -11.8125 °C

In [2]:
```

```
Konsole 1/A ×
Bitte Höhe in m eingeben: -100
Fehler: Höhe zu gering

(1) nochmal oder (0) beenden: 1

Bitte Höhe in m eingeben: 2990
Die Temperatur beträgt -4.43 °C

(1) nochmal oder (0) beenden: 0
```

[1] International Civil Aviation Organization: Manual of the ICAO Standard Atmosphere extended to 80 kilometres (262 500 feet), 3rd Edition, Doc 7488/3, 1993.

Zusatzaufgabe

- Geben Sie die berechnete Temperatur mit zwei Nachkommastellen aus.
- Falls gewünscht, sollen in einer Schleife immer weitere Berechnungen ablaufen (Bildschirmfoto, rechts).
- Zeichnen Sie die Struktogramme zu Ihren Lösungen.

3 Schleifen, Matplotlib

3.1 Fakultät

Schreiben Sie ein Skript zur Berechnung der Fakultät $n!$ einer natürlichen Zahl n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \tag{3.1}$$

- Zu Beginn des Skripts wird der Wert n eingegeben.
- Falls ein ungültiger Wert $n < 1$ oder $n > 50$ eingegeben wurde, erfolgt eine Fehlermeldung. In diesem Fall wird die Eingabe wiederholt.
- Nach der Eingabe eines gültigen Werts wird die Fakultät $n!$ in einer while-Schleife berechnet und auf dem Bildschirm ausgegeben.

Zusatzaufgabe

Nutzen Sie zur Berechnung der Fakultät eine for-Schleife anstelle der zunächst verwendeten while-Schleife (oder umgekehrt).

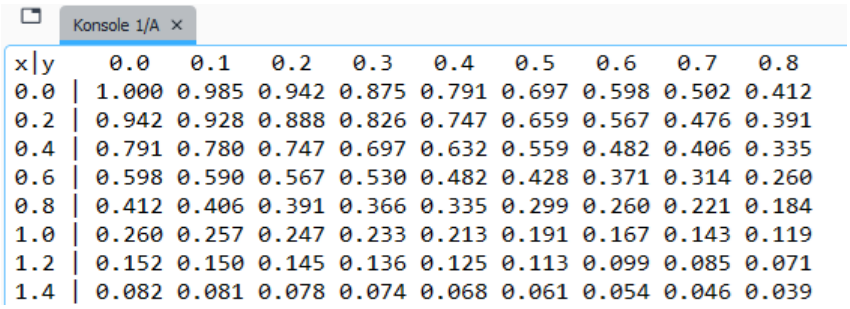
3.2 Funktion von zwei Veränderlichen

Schreiben Sie ein Skript, das die folgende Funktion von zwei Veränderlichen x und y berechnet und tabellarisch mit drei Nachkommastellen auf dem Bildschirm ausgibt:

$$f(x, y) = \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \tag{3.2}$$

Beachten Sie die folgenden Hinweise:

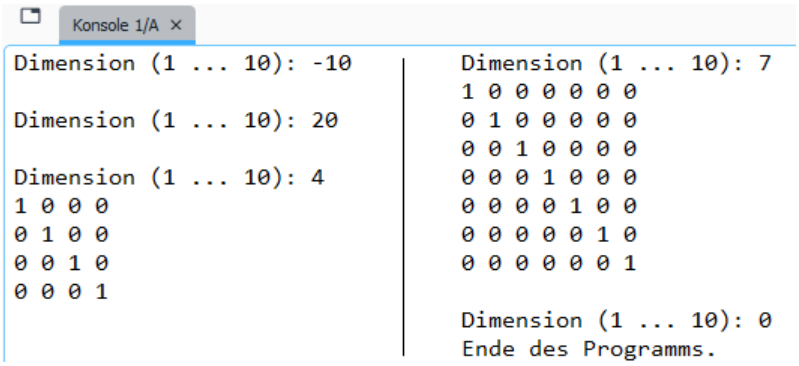
- Die y-Werte laufen von 0,0 bis 0,8 mit einer Schrittweite von 0,1 nach rechts.
- Das x-Werte laufen von 0,0 bis 1,4 mit einer Schrittweite von 0,2 nach unten.



3.3 Einheitsmatrix

Programmieren Sie ein Python-Skript zur Ausgabe einer quadratischen Einheitsmatrix auf dem Bildschirm. Bei einer Einheitsmatrix sind die Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich eins, alle anderen Elemente sind gleich null.

- Zunächst wird die Dimension der Matrix über die Tastatur eingegeben.
- Negative Dimensionen oder Dimensionen größer als 10 sind nicht zulässig.
- Die Eingabe wird solange wiederholt, bis eine gültige Dimension eingegeben wird.
- Bei einer Eingabe von 0 (null) wird das Skript beendet.



Zusatzaufgabe

Programmieren Sie das Skript auf unterschiedliche Arten:

- Verwenden Sie zunächst zwei verschachtelte Schleifen.
- Mit der äußeren Schleife durchlaufen Sie die Zeilen der Matrix, mit der inneren Schleife durchlaufen Sie die Spalten.
- Versuchen Sie auch, das Skript mit einer einzigen Schleife zu programmieren.
- Ersetzen Sie zur Übung alle for-Schleifen durch while-Schleifen und umgekehrt.
- Erstellen Sie Struktogramme von Ihren Lösungen.

3.4 Würfelspiel

Schreiben Sie ein Python-Skript zur Simulation eines Würfelspiels:

- Es werden 1000 ganzzahlige Zufallszahlen im Bereich 1 ... 6 erzeugt.
- Geben Sie auf dem Bildschirm aus, welche Zahl wie oft gewürfelt wurde.
- Die einzelnen Zufallszahlen erzeugen Sie mit `w = randint(1, 6)`.
- Zu Beginn Ihres Skripts importieren Sie dafür das random-Modul:
  `from random import *`

Zusatzaufgabe

Programmieren Sie zwei unterschiedliche Varianten des Würfelspiels: Speichern Sie zunächst die 6 verschiedenen Zählerstände in separaten Variablen. Programmieren Sie eine zweite Variante, bei der die Zählerstände stattdessen in einer Liste stehen.

3.5 Funktionswerte berechnen

Das folgende Skript berechnet die Funktion $f(x) = 2x - 2$ im Intervall $-2 \leq x \leq 2$. Ändern bzw. erweitern Sie das Skript wie angegeben:

```
x = -2
while x <= 2:
    y = 2 * x - 2
    print(f"{x} {y}")
    x = x + 0.25
```

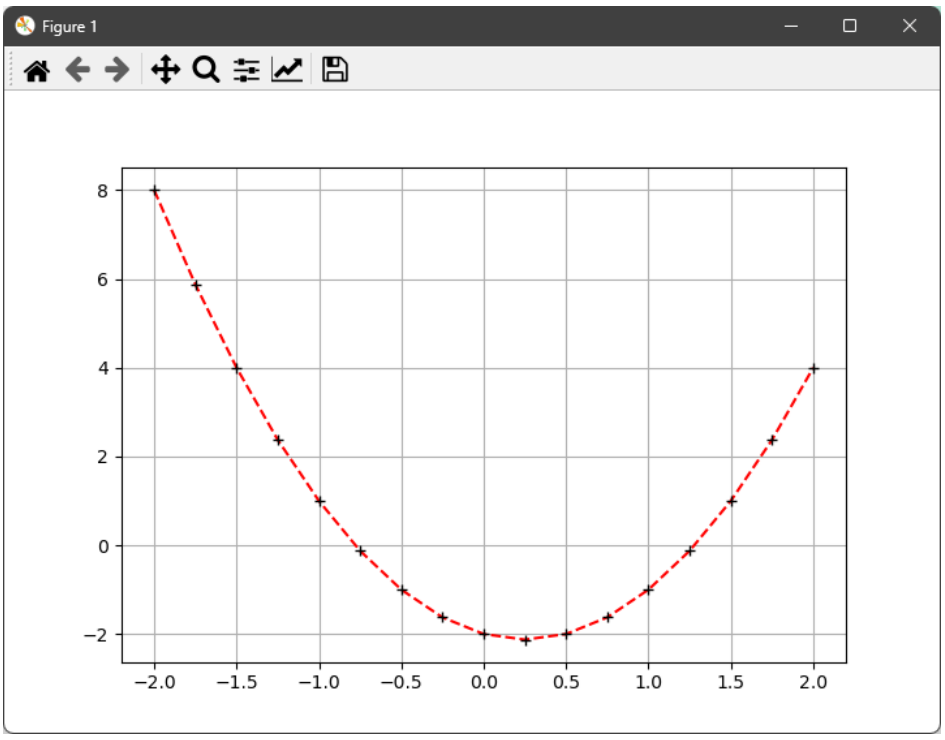
- Nun soll die Funktion $f(x) = 2x^2 - x - 2$ berechnet werden.
- Alle Werte sollen tabellarisch mit drei Nachkommastellen ausgegeben werden.
- Das gewünschte x-Intervall soll per Tastatur eingegeben werden.

3.6 Funktionsgraphen zeichnen

Erweitern Sie das Skript aus Aufgabe 3.5 so, dass zusätzlich zur Ausgabe der Funktionswerte der Funktionsgraph gezeichnet wird. Variieren Sie zur Übung die Linienform des Funktionsgraphen (durchgezogen, gestrichelt usw.) und auch seine Farbe.

Zusatzaufgabe

- Zeichen Sie nun die Sinuskurve $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.
- Wie viele x- und y-Werte werden in Ihrem Skript berechnet?
- Wie groß ist die Schrittweite Δx zwischen den einzelnen x-Werten?
- Variieren Sie die Schrittweite Δx und beobachten Sie, wie sich die grafische Darstellung verändert.

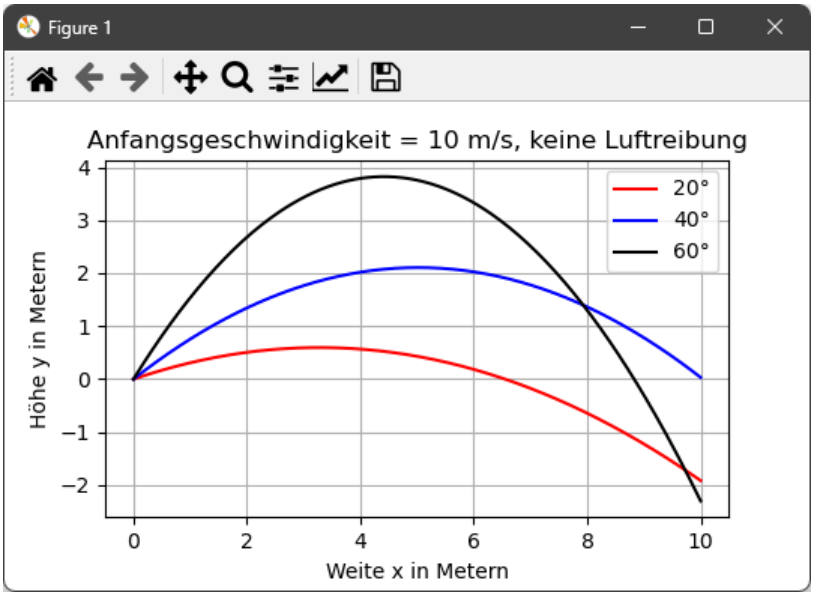


3.7 Wurfparabel

Eine Kugel wird unter Winkeln von $\alpha_0 = 20°$, $\alpha_0 = 40°$ sowie $\alpha_0 = 60°$ schräg nach oben geworfen. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, Luftreibung wird vernachlässigt. Stellen Sie den Verlauf der drei Flugbahnen grafisch dar:

$$y(x) = -\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_{x0}}\right)^2 + v_{y0} \cdot \left(\frac{x}{v_{x0}}\right) \tag{3.3}$$

mit $v_{x0} = v_0 \cdot \cos\alpha_0$, $v_{y0} = v_0 \cdot \sin\alpha_0$ und $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

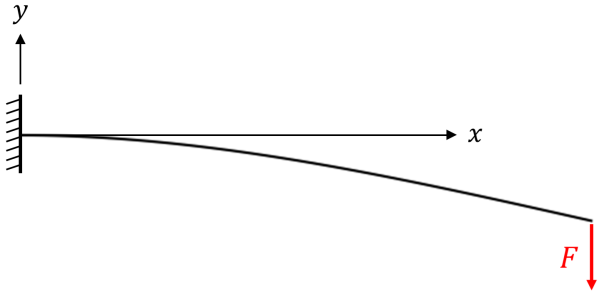


Zusatzaufgabe

- Fügen Sie einen Titel und eine Legende zur Abbildung hinzu.
- Beschriften Sie Koordinatenachsen („Weite x in Metern“, „Höhe y in Metern“).

3.8 Elastischer Balken

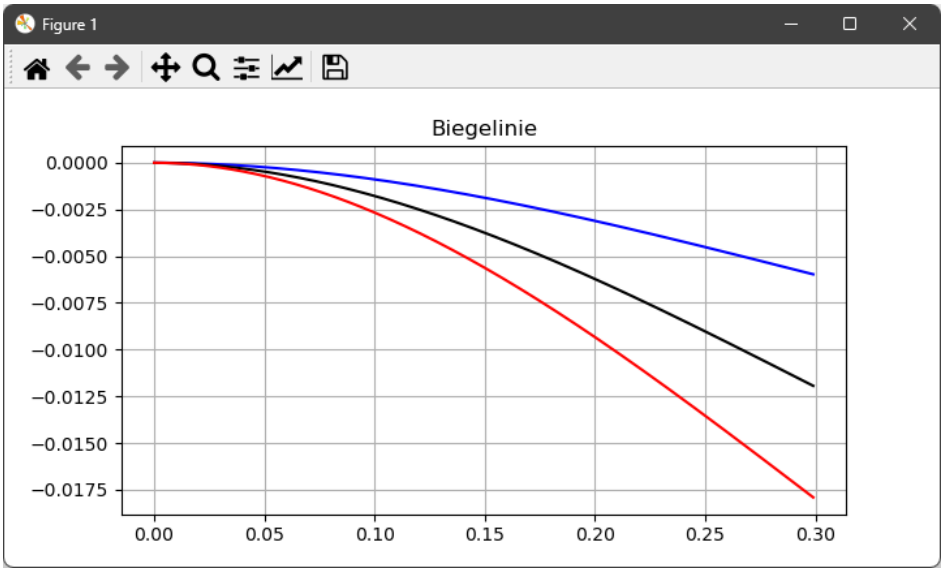
Ein elastischer Balken der Länge $l = 0{,}3\,\mathrm{m}$ ist an seinem linken Ende fest eingespannt. Am rechten Ende wirkt die Kraft F senkrecht nach unten.



Erstellen Sie ein Skript, das die Biegelinie $y(x)$ im Bereich $0\,\text{m} \le x \le 0{,}3\,\text{m}$ für drei verschiedene Kräfte $F_1 = 1\,\text{N}$, $F_2 = 2\,\text{N}$ und $F_3 = 3\,\text{N}$ zeichnet. Für die Biegelinie gilt:

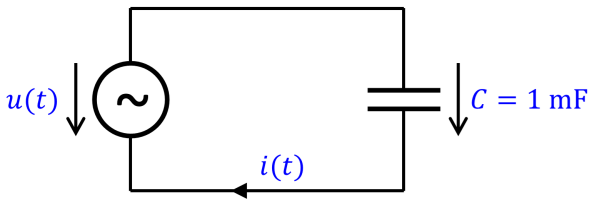
$$y(x) = -\frac{F}{9} \cdot (0,9x^2 - x^3) \text{ mit } x, y \text{ in m und } F \text{ in N} \tag{3.4}$$

- Für jede Biegelinie sollen mindestens 100 Stützpunkte berechnet werden.
- Stellen Sie die drei Biegelinien in unterschiedlichen Farben dar.
- Geben Sie auch ein Koordinagengitter und den Titel „Biegelinie“ aus.



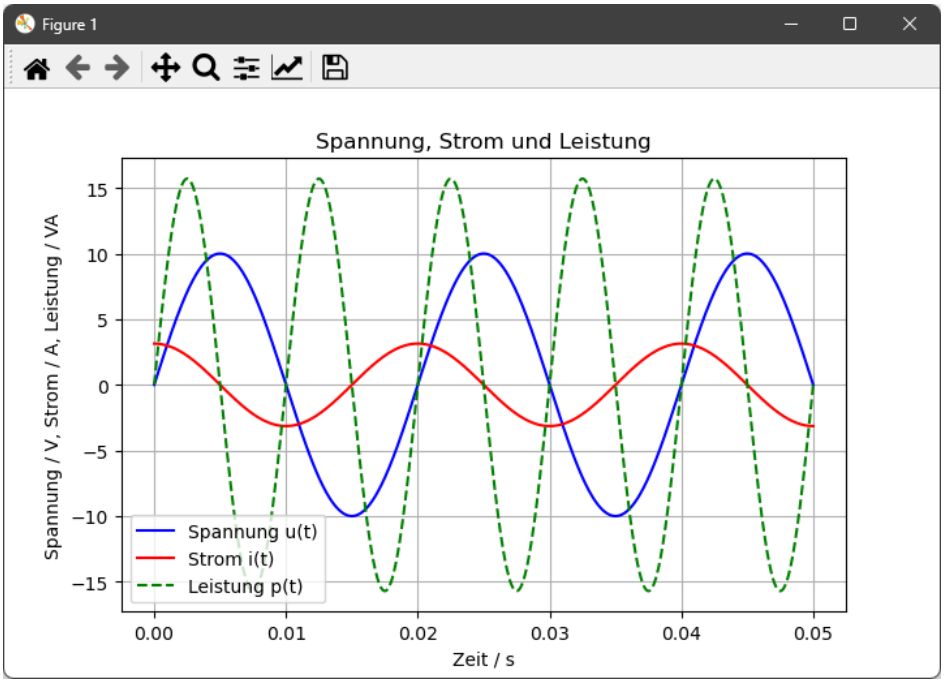
3.9 Spannung, Strom und Leistung

Ein Kondensator $C = 1\,\text{mF}$ ist an eine Wechselspannungsquelle $u(t) = 10\,\text{V} \cdot \sin(2\pi f t)$ angeschlossen. Die Frequenz der Wechselspannung beträgt $f = 50\,\text{Hz}$. Es fließt der Strom $i(t) = 1\,\text{A} \cdot \pi \cdot \cos(2\pi f t)$. Stellen Sie die zeitlichen Verläufe von $u(t)$, $i(t)$ und der Leistung $p(t)$ (= Produkt aus Spannung und Strom) in einem gemeinsamen Diagramm grafisch dar.



Zusatzaufgabe

- Zeichnen Sie die Spannung in blauer, den Strom in roter Farbe. Der Verlauf der Leistung soll in grüner Farbe gestrichelt dargestellt werden.
- Fügen Sie den Titel „Spannung, Strom und Leistung“ zum Diagramm hinzu.
- Fügen Sie Achsenbeschriftungen und eine Legende zum Diagramm hinzu.

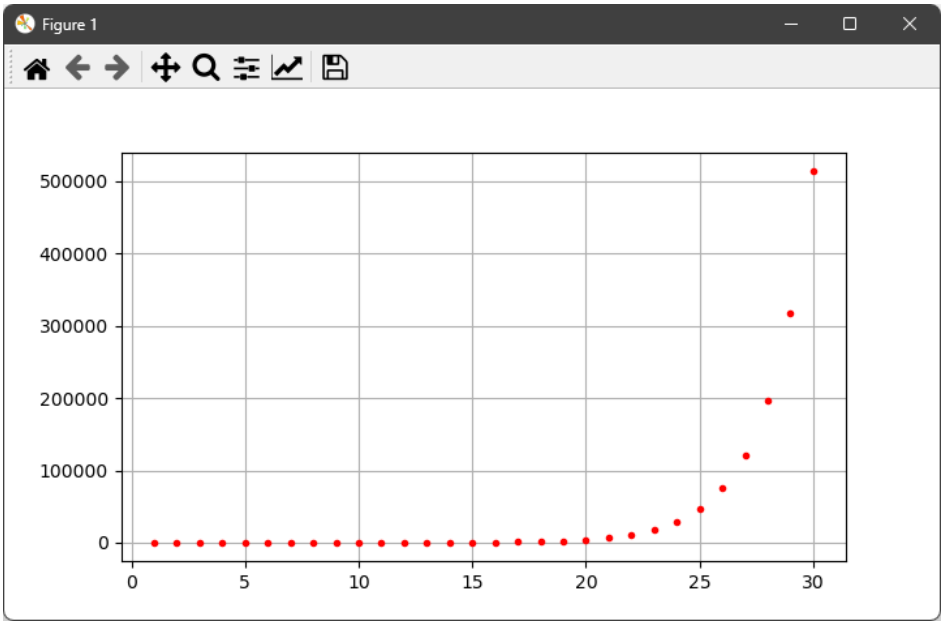


3.10 Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge ist eine mathematische Folge, bei der jede Zahl die Summe der beiden vorangegangenen ist. Sie wurde erstmals im 13. Jahrhundert von Leonardo Fibonacci beschrieben. Schreiben Sie ein Python-Skript, welches die ersten 30 Fibonacci-Zahlen auf dem Bildschirm auflistet: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

Zusatzaufgabe

Stellen Sie die ersten 30 Fibonacci-Zahlen in grafischer Form dar.



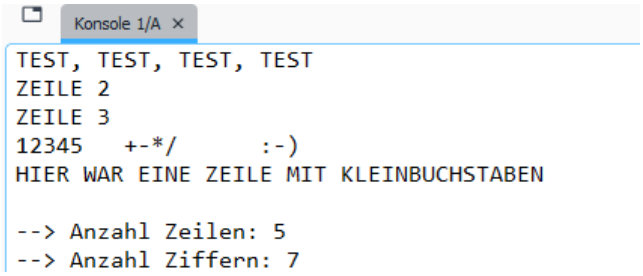
3.11 Zeichenketten aus Textdatei lesen

Das folgende Skript gibt den Inhalt einer Textdatei auf dem Bildschirm aus.

```
# Textdatei zum Lesen öffnen
with open("data.txt", "r") as file:

    # Nächste Zeile aus der Textdatei lesen
    for zeile in file:

        # Zeile (Zeichenkette, String) ausgeben
        print(f"{zeile}", end="")
```

Ändern bzw. erweitern Sie das abgebildete Skript:

- Der Inhalt der Textdatei soll in Großbuchstaben ausgegeben werden.
- Die Anzahl der Zeilen in der Textdatei soll ausgegeben werden.
- Die Anzahl der Ziffern (0, 1, 2 ... 9) soll ebenfalls ausgegeben werden.



4 Funktionen

4.1 Euklidischer Algorithmus

Programmieren Sie eine Funktion ggT(a, b) zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers (ggT) von a und b. Verwenden Sie dazu den euklidischen Algorithmus.[2]

Erzeugen Sie drei leere Listen aa, bb und cc. Füllen Sie anschließend die Listen aa und bb mit jeweils 100 ganzzahligen Zufallszahlen im Bereich 1 ... 100. Mithilfe der Funktion ggT(a, b) wird nun der ggT von aa[0] und bb[0] berechnet und in cc[0] gespeichert. Der ggT von aa[1] und bb[1] wird in cc[1] gespeichert, der ggT von aa[2] und bb[2] wird in cc[2] gespeichert usw.

Geben Sie die drei Listen tabellarisch auf dem Bildschirm aus.

Zusatzaufgabe

- Geben Sie auch die kleinsten gemeinsamen Vielfache (kgV) der Elemente in den Listen aa und bb aus.
- Geben Sie die Ergebnisse in umgekehrter Reihenfolge auf dem Bildschirm aus, also beginnend bei Nr. 100 rückwärts bis Nr. 1.

[2] Details zum euklidischen Algorithmus finden Sie zum Beispiel unter https://de.wikipedia.org/wiki/Euklidischer_Algorithmus (Stand: 21.01.2024).

4.2 Primzahlen

Die folgende Funktion prüft, ob die als Parameter übergebene Zahl eine Primzahl ist (Rückgabewert: True) oder nicht (Rückgabewert: False).

```
def primzahl(zahl):
    if zahl < 2:
        return False

    for t in range(2, zahl):
        if zahl % t == 0:
            return False

    return True
```

Programmieren Sie ein Skript, das nach der Eingabe von zwei ganzzahligen Werten a und b alle Primzahlen im Intervall a ... b ermittelt und auf dem Bildschirm ausgibt.

Zusatzaufgabe

- Geben Sie auch die Anzahl der Primzahlen im Intervall a ... b aus.
- Zeichnen Sie ein Struktogramm der Funktion primzahl(zahl).

4.3 Mitternachtsformel

Das folgende Python-Skript berechnet die Nullstellen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ und gibt die Ergebnisse auf dem Bildschirm aus (vergl. Aufgabe 1.2).

```
a = float(input("a: "))
b = float(input("b: "))
c = float(input("c: "))

n, x1, x2 = qsolve(a, b, c)  # Die Definition von qsolve fehlt noch.

if n == 0:
    print("Keine reellen Nullstellen!")
elif n == 1:
    print(f"Doppelte Nullstelle bei {x1:.2f}")
else:
    print(f"Nullstellen bei {x1:.2f} und {x2:.2f}")
```

Die Funktion qsolve(a, b, c) hat mehrere Rückgabewerte:

- n: Anzahl der reellen Nullstellen (0, 1 oder 2)
- x1, x2: Nullstellen

Falls es keine reellen Nullstellen gibt, wird für x1 und x2 jeweils 0 (null) zurückgegeben. Fügen Sie die fehlende Definition der Funktion qsolve(a, b, c) zum Skript hinzu.

Zusatzaufgabe

Falls es keine reellen Nullstellen gibt, soll das Skript stattdessen die beiden komplexen Nullstellen der quadratischen Gleichung ermitteln und auf dem Bildschirm ausgeben. Tipp: Importieren Sie anstelle des math-Moduls das cmath-Modul.

4.4 Quersumme

Schreiben Sie eine Funktion qsum(zahl) zur Berechnung der Quersumme einer ganzen Zahl. Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. Die Quersumme von 987 ist gleich $9 + 8 + 7$, also 24.

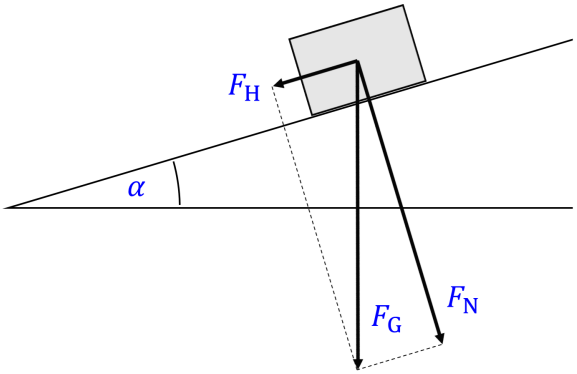
Die ganze Zahl wird als Übergabeparameter an die Funktion qsum(zahl) übergeben, die berechnete Quersumme wird als Rückgabewert zurückgegeben. Falls die Funktion mit einem negativen Wert aufgerufen wird, ist der Rückgabewert gleich 0 (null).

Programmieren Sie auch ein Skript, in dem zunächst eine Zahl eingegeben, anschließend die Funktion qsum(zahl) aufgerufen und schließlich die Quersumme auf dem Bildschirm ausgegeben wird.

Tipp: Verwenden Sie (zahl % 10), um die letzte Ziffer einer ganzen Zahl zu ermitteln.

4.5 Kraftvektor zerlegen

Ein Körper der Masse m liegt auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α. Für die Fallbeschleunigung gilt: $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$



Fügen Sie die fehlende Definition der Funktion kraft(m, alpha) zum abgebildeten Skript hinzu. Diese Funktion zerlegt die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ in die zwei Komponenten F_N (senkrecht zur Oberfläche) und F_H (parallel zur Oberfläche, Hangabtriebskraft).

```
1 m = float(input("Masse in kg: "))
2 alpha = float(input("Winkel in Grad: "))
3
4 fn, fh = kraft(m, alpha)  # Die Definition von kraft fehlt noch.
5
6 print(f"Senkrecht zur Oberfläche: {fn:.2f} N")
7 print(f"Hangabtriebskraft: {fh:.2f} N")
```

Die Funktion kraft(m, alpha) gibt die beiden Ergebnisse F_N und F_H als Rückgabewerte zurück, sie hat also mehr als einen Rückgabewert.

Zusatzaufgabe

Falls eine negative Masse m eingegeben wird oder der eingegebene Winkel nicht im Bereich $0° \le \alpha \le 90°$ liegt, wird die Eingabe wiederholt, bis gültige Werte vorliegen.

4.6 Numerische Integration, Monte-Carlo-Verfahren

Das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = (\sin x)^2$ auf dem Intervall $[a; b]$ soll mit einem „Monte-Carlo-Verfahren“ folgendermaßen numerisch ermittelt werden:

Zwei Variablen z1 und z2 werden zunächst auf null gesetzt, die Integrationsgrenzen a und b werden per Tastatur eingegeben. Eine Schleife wiederholt die folgenden Schritte 10000 mal:

- Es wird ein zufälliger x-Wert (Kommazahl, float) im Bereich $[a; b]$ erzeugt.
- Es wird ein zufälliger y-Wert (Kommazahl, float) im Bereich $[0; 1]$ erzeugt.
- Wenn $f(x) < y$ ist, dann wird z1 inkrementiert, ansonsten wird z2 inkrementiert.
- Der Näherungswert A_1 des gesuchten Integrals wird berechnet und auf dem Bildschirm ausgegeben: $A_1 = z1 \cdot (b - a)/(z1 + z2)$.

Definieren Sie zur Berechnung von $f(x)$ bzw. $F(x)$ (Zusatzaufgabe) zwei separate Funktionen: An diese Funktionen werden jeweils einzelne x-Werte übergeben, die daraus berechneten Werte $f(x)$ bzw. $F(x)$ werden als Rückgabewerte zurückgegeben.

Zusatzaufgabe

- Berechnen Sie über die Stammfunktion $F(x) = (x - \sin x \cdot \cos x)/2$ den exakten Wert A_2 des Integrals.
- Geben Sie zusätzlich zu den berechneten Werten A_1 und A_2 auch deren prozentuale Abweichung auf dem Bildschirm aus.

4.7 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Ein Widerstandssortiment für Hobbyelektroniker enthält 20 unterschiedliche Widerstandswerte: 10 Ω, 47 Ω, 100 Ω, 150 Ω, 220 Ω, 330 Ω, 470 Ω, 1 kΩ, 1,5 kΩ, 2,2 kΩ, 4,7 kΩ, 10 kΩ, 22 kΩ, 27 kΩ, 33 kΩ, 47 kΩ, 100 kΩ, 220 kΩ, 470 kΩ und 1 MΩ. Falls für eine Schaltung Widerstandswerte benötigt werden, die nicht im Sortiment enthalten sind, kann man sich oft mit Parallel- oder Reihenschaltungen behelfen.

Programmieren Sie ein Skript, das zu einem bestimmten Widerstandswert („Sollwert“) Parallel- und Reihenschaltungen von zwei Widerständen vorschlägt, die diesem Widerstandswert möglichst nahe kommen. Parallel- und Reihenschaltungen von mehr als zwei Widerständen sollen in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt werden.

Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung wird folgendermaßen berechnet:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 \tag{4.1}$$

Für eine Parallelschaltung von zwei Widerständen gilt:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.2}$$

Zusatzaufgabe

- Geben Sie eine Empfehlung aus, welche der drei Varianten (bester Einzelwiderstand, beste Reihen- oder beste Parallelschaltung) zur geringsten Abweichung vom Sollwert führt.
- Ihr Skript soll in einer Schleife solange immer weitere Berechnungen durchführen, bis ein negativer Sollwert eingegeben wird.
- Zeichnen Sie ein Struktogramm der von Ihnen programmierten Funktion zur Ermittlung der besten Reihenschaltung.

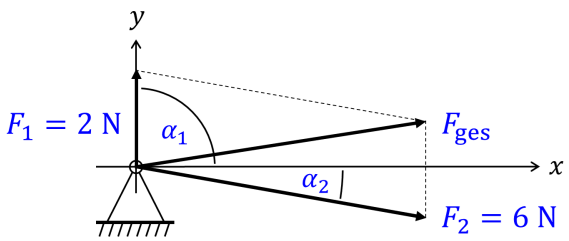
```
Konsole 1/A ×
Berechnung von Widerstandsschaltungen
======================================

Sollwert in Ohm, negativer Wert zum Beenden: 1300

A. Bester Einzelwiderstand: 1500 Ohm.
Abweichung vom Sollwert: 200 Ohm (15.38 %).

B. Beste Reihenschaltung: 330 und 1000 Ohm.
Gesamtwiderstand: 1330 Ohm.
Abweichung vom Sollwert: 30 Ohm (2.31 %).

C. Beste Parallelschaltung: 1500 und 10000 Ohm.
Gesamtwiderstand: 1304.35 Ohm.
Abweichung vom Sollwert: 4.35 Ohm (0.33 %).

Empfehlung: Variante C

Sollwert in Ohm, negativer Wert zum Beenden: -1

In [2]:
```

5 Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung

5.1 Kraftvektoren addieren

Auf ein Festlager wirken mehrere Kräfte (ebenes Kräftesystem, alle Kräfte liegen in der xy-Ebene). Schreiben Sie ein Python-Skript, welches die Gesamtkraft berechnet, die auf das Festlager wirkt:

- Zunächst werden die Beträge und Winkel aller Kräfte eingegeben. Die Eingabe endet, wenn ein negativer Betrag (oder null) eingegeben wird.
- Die eingegebenen Kräfte und Winkel werden in Listen gespeichert.
- Nach dem Ende der Eingabe werden alle Kräfte und Winkel tabellarisch untereinander mit drei Nachkommastellen ausgegeben. Zu Beginn jeder Zeile wird eine laufende Nummer (1, 2, 3 ...) ausgegeben.
- Schließlich wird die Gesamtkraft berechnet. Betrag und Winkel der Gesamtkraft werden mit 3 Nachkommastellen ausgegeben. Falls gar keine Kräfte eingegeben wurden, erfolgt ein entsprechender Hinweis.



Die Abbildung zeigt ein Beispiel mit (nur) zwei Kräften: $F_1 = 2\,\mathrm{N}$ mit einem Winkel von $\alpha_1 = 90°$ sowie $F_2 = 6\,\mathrm{N}$ mit einem Winkel von $\alpha_2 = -10°$. Dadurch ergibt sich eine Gesamtkraft $F_{\mathrm{ges}} = 5{,}986\,\mathrm{N}$ mit einem Winkel von $\alpha_{\mathrm{ges}} = 9,210°$.

5.2 Mondrakete Saturn V

Schreiben Sie ein Skript, das die Geschwindigkeit der Mondrakete Saturn V während der Brenndauer der ersten Stufe in Zeitschritten der Größe $\Delta t = 0{,}05\,\mathrm{s}$ berechnet und auf dem Bildschirm ausgibt.

Die folgenden technischen Daten[3] sind gegeben:

- Startmasse inkl. Treibstoff und Nutzlast: $m = 2{,}85 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}$
- Treibstoffverbrauch („Brennrate“): $R = 13{,}84 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/s}$
- Schubkraft der ersten Raketenstufe: $F_{\mathrm{Schub}} = 34 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$
- Fallbeschleunigung, wird als gleichbleibend angenommen: $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

Dabei macht der Treibstoff der ersten Raketenstufe 73 % der Startmasse aus.

[3] Vergl. Tipler/Mosca: Physik, 6. Auflage, Beispiel 8.19 auf Seite 307

Gehen Sie bei der Programmierung des Skripts wie folgt vor:

- Zu Beginn ($t = 0$) befindet sich die Rakete in Ruhe ($v = 0$).
- Wenn Masse $m(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t bekannt sind, können $m(t + \Delta t)$ und $v(t + \Delta t)$ zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ berechnet werden:

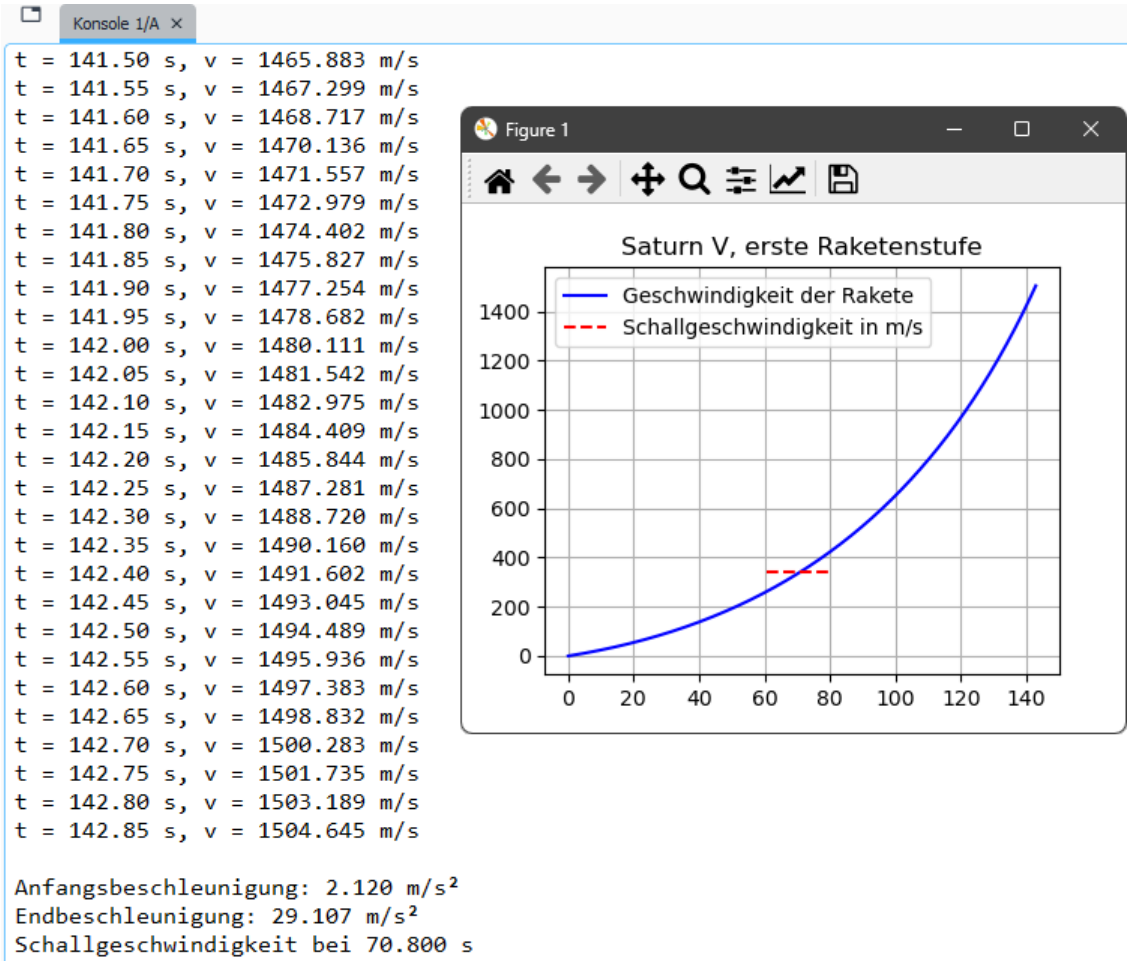
$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \cdot a(t) \text{ mit } a(t) = F_{\text{Schub}}/m(t) - g \tag{5.1}$$

$$m(t + \Delta t) = m(t) - \Delta t \cdot R \tag{5.2}$$

- Nach jedem Zeitschritt $\Delta t = 0{,}05\,\text{s}$ werden die aktuellen Werte von t (zwei Nachkommastellen) und v (drei Nachkommastellen) tabellarisch ausgegeben.
- Die Berechnung endet, sobald der Treibstoff der ersten Stufe zu mehr als 95 % aufgebraucht ist.
- Unmittelbar vor dem Ende des Skripts werden die folgenden Werte mit drei Nachkommastellen ausgegeben: Die Anfangsbeschleunigung $a(t = 0)$, die Beschleunigung zum Berechnungsende sowie der Zeitpunkt t_{Schall}, zu dem die Rakete die Schallgeschwindigkeit $c = 340\,\text{m/s}$ erstmals überschreitet.

Zusatzaufgabe

Geben Sie – zusätzlich zur Tabelle mit den Berechnungsergebnissen – den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit $v(t)$ in grafischer Form aus.



5.3 Kreiszahl Pi

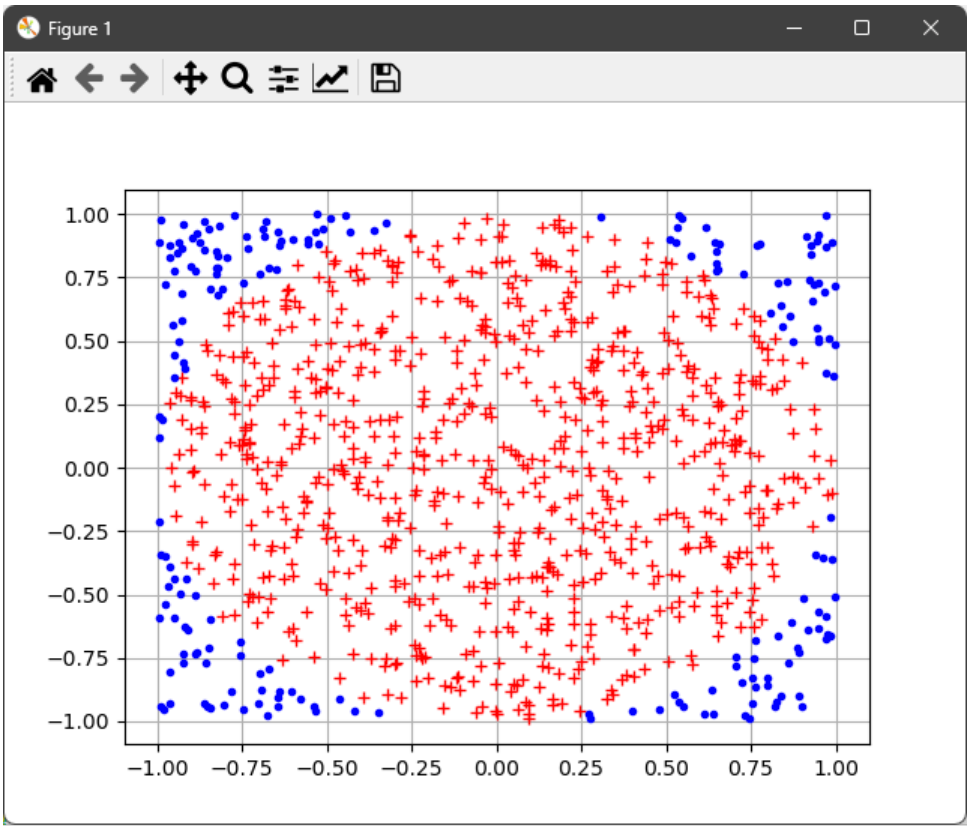
Schreiben Sie ein Skript zur näherungsweisen Berechnung der Kreiszahl Pi mithilfe eines „Monte-Carlo-Verfahrens“. Zu Beginn des Skripts wird über die Tastatur die gewünschte Anzahl n der Berechnungsschritte[4] eingegeben. Außerdem wird die Variable n_kreis auf 0 (null) gesetzt.

In einer Schleife werden die folgenden Schritte n mal wiederholt:

- Es wird ein zufälliger x-Wert im Bereich von -1.0 bis 1.0 generiert (Kommazahl, beide Grenzen eingeschlossen).
- Es wird ein zufälliger y-Wert im Bereich von -1.0 bis 1.0 generiert (Kommazahl, beide Grenzen eingeschlossen).
- Falls der Punkt $P(x;y)$ auf dem Rand oder innerhalb des Einheitskreises[5] liegt, wird die Variable n_kreis inkrementiert.

Das Skript berechnet nun mit $\pi \approx 4 \cdot n_{\text{kreis}}/n$ einen Näherungswert für die Kreiszahl Pi und gibt diesen mit 10 Nachkommastellen auf dem Bildschirm aus.

Zusätzlich werden die n zufällig generierten Punkte $P(x;y)$ grafisch dargestellt: Alle Punkte auf dem Rand oder innerhalb des Einheitskreises werden als rote Pluszeichen (+) dargestellt, alle anderen als blaue Punkte. Denken Sie auch an die Ausgabe des Koordinatengitters (siehe Bildschirmfoto).



[4] Größere n führen zu genaueren Ergebnissen. Typische Werte sind $n = 10000$ oder $n = 100000$.
[5] Der Einheitskreis ist ein Kreis mit dem Radius $r = 1$ um den Koordinatenursprung $M(0;0)$.

5.4 Lithium-Ionen-Akku

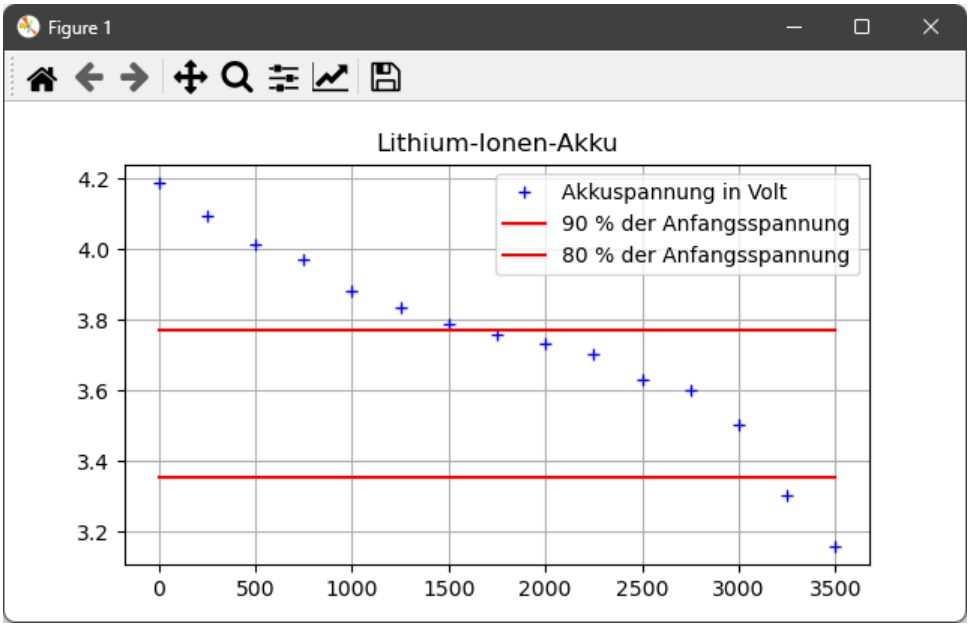
Ein Lithium-Ionen-Akku wird entladen. Die Akkuspannung wird in regelmäßigen Zeitabständen gemessen und in der Textdatei „messung.txt“ gespeichert. In jeder Zeile der Textdatei stehen ein Zeitpunkt (in Sekunden) sowie die zu diesem Zeitpunkt gemessene Akkuspannung (in Volt).

Das folgende Python-Skript gibt alle in der Textdatei gespeicherten Zeitpunkte und Akkuspannungen auf dem Bildschirm aus:

```
# Textdatei zum Lesen öffnen
with open("messung.txt", "r") as file:

    # Der Reihe nach alle Zeilen durchlaufen
    for line in file:
        values = line.split()
        t = float(values[0])
        u = float(values[1])

        # In t steht der Zeitpunkt, in u steht die
        # Akkuspannung aus der aktuellen Zeile
        print(f"{t} {u}")
```

Erweitern Sie das Skript, sodass die Zeitpunkte und Akkuspannungen nun in grafischer Form dargestellt werden:

- Die einzelnen Messpunkte werden durch blaue Pluszeichen (+) angezeigt.
- Zeichnen Sie zwei horizontale rote Linien, die obere Linie bei 90 %, die untere Linie bei 80 % der Anfangsspannung.
- Denken Sie auch an die Ausgabe des Koordinatengitters und des Titels.

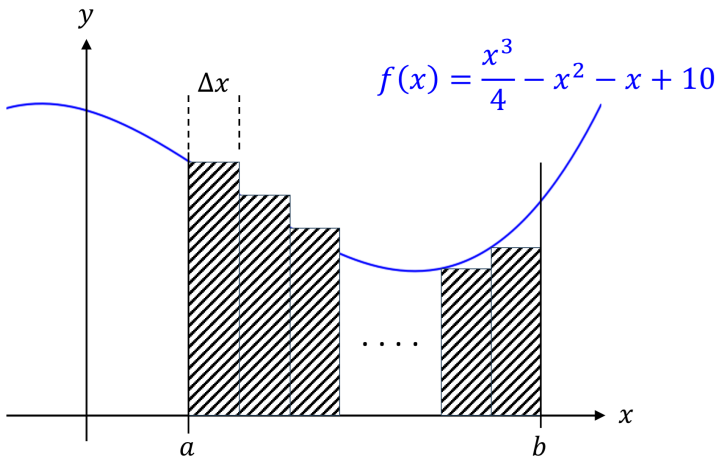


Geben Sie zusätzlich zur grafischen Darstellung die folgenden beiden Zeitpunkte in Textform auf dem Bildschirm aus (in Sekunden, mit einer Nachkommastelle):

- Wann sinkt die Spannung erstmals unter 90 % der Anfangsspannung?
- Wann sinkt die Spannung erstmals unter 80 % der Anfangsspannung?

5.5 Numerische Integration, Teilflächen aufsummieren

Schreiben Sie ein Skript, das die Fläche unter der Kurve, die durch die Funktion $f(x)$ beschrieben wird, im Bereich $[a;b]$ ermittelt.



- Zunächst werden die Bereichsgrenzen a und b über die Tastatur eingegeben.
- Falls $a \geq b$ ist, wird die Eingabe nach einer kurzen Fehlermeldung wiederholt.
- Berechnen Sie den Näherungswert der gesuchten Fläche A_1 durch Aufsummieren von 100 rechteckigen Teilflächen der Breite Δx:

$$A_1 \approx \sum_{i=0}^{99} \Delta x \cdot f(a + i \cdot \Delta x) \text{ mit } \Delta x = \frac{b-a}{100} \tag{5.3}$$

- Geben Sie A_1 mit vier Nachkommastellen auf dem Bildschirm aus.

Zusatzaufgabe

- Berechnen Sie den exakten Wert der Fläche A_2 über die Stammfunktion $F(x)$:

$$A_2 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{5.4}$$

- Definieren Sie zur Berechnung von $f(x)$ und $F(x)$ geeignete Python-Funktionen.
- Geben Sie zusätzlich zu A_1 und A_2 auch den Betrag der Differenz $|A_1 - A_2|$ aus.

```
Konsole 1/A ×
a: 3
b: 0.5

Eingabefehler!

a: 0.5
b: 2.4

A1 = 13.7862
A2 = 13.7484
Betrag der Differenz = 0.0379

In [2]:
```

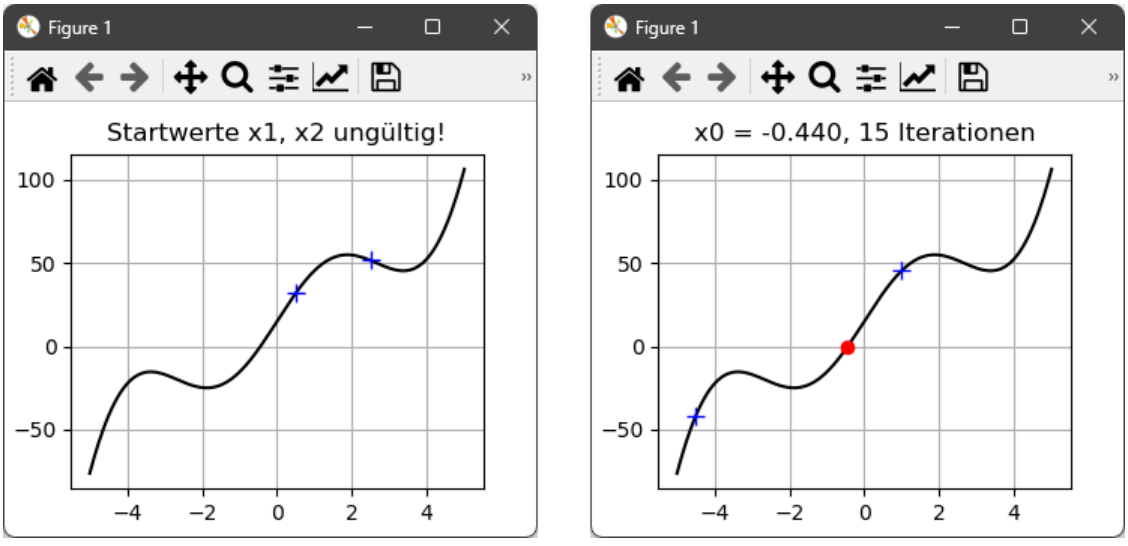
5.6 Nullstelle einer Funktion, Bisektionsverfahren

Schreiben Sie ein Skript, das die Nullstelle x_0 der Funktion $f(x) = x^3 + 35 \cdot \sin(x) + 15$ numerisch ermittelt:

- Zu Beginn werden zwei Kommazahlen x_1 und x_2 per Tastatur eingegeben.
- Der Verlauf der Funktion $f(x)$ im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ wird in schwarzer Farbe gezeichnet. Zeichnen Sie auch das in den Bildschirmfotos sichtbare Koordinatengitter. Die Positionen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ werden durch blaue Pluszeichen (+) besonders markiert.
- Falls $f(x_1) \cdot f(x_2) \geq 0$ ist, befindet sich die Nullstelle außerhalb des Intervalls $[x_1, x_2]$ oder genau auf dessen Rand. In diesem Fall wird am oberen Rand der Grafik der Titel „Startwerte x1, x2 ungültig!“ ausgegeben.
- Andernfalls wird die Nullstelle x_0 mit dem Bisektionsverfahren (Intervallhalbierungsverfahren, siehe weiter unten) numerisch ermittelt und in der Grafik durch einen roten Punkt markiert.
- Wenn eine Nullstelle ermittelt werden konnte, wird am oberen Rand der Grafik der Titel „x0 = (*), (**) Iterationen“ ausgegeben. Dabei steht (*) für die Nullstelle x_0 mit drei Nachkommastellen und (**) für die Anzahl der Schleifendurchläufe, die vom Bisektionsverfahren benötigt wurden.

Das Bisektionsverfahren wird folgendermaßen implementiert:

1. Es wird ein erster Näherungswert für die Nullstelle $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ berechnet.
2. Wiederholen Sie die folgenden Schritte, solange der Betrag $|f(x_0)| > 10^{-3}$ ist:
   - Wenn $f(x_0) \cdot f(x_1) \geq 0$ ist, dann setze $x_1 = x_0$, sonst setze $x_2 = x_0$.
   - Es wird ein neuer Näherungswert $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ berechnet.
3. Nach dem Ende der Schleife befindet sich die gesuchte Nullstelle in x_0.



Zwischen $x_1 = 0,5$ und $x_2 = 2,5$ hat die Funktion $f(x)$ keine Nullstelle (Bildschirmfoto, links). Zwischen $x_1 = -4,5$ und $x_2 = 1$ findet das Bisektionsverfahren nach 15 Iterationen die Nullstelle $x_0 = -0,440$ (Bildschirmfoto, rechts).

A Kurzfragen

Operatoren

Wie lauten die Ergebnisse der folgenden Berechnungen?

```
a = 1999
b = 4

c = a % b
d = a // b
e = (c == d)
f = b ** b

print(f"c = {c}")
print(f"d = {d}")
print(f"e = {e}")
print(f"f = {f}")
```

```
x1 = 2 ** 2 ** 3
x2 = 2 ** (2 ** 3)
x3 = (2 ** 2) ** 3

print(f"x1 = {x1}")
print(f"x2 = {x2}")
print(f"x3 = {x3}")
```

Verzweigungen

In diesem Skript zur Berechnung des Body-Mass-Index (BMI, vergl. Aufgabe 2.3) hat sich ein Fehler versteckt. Finden Sie ihn?

```
m = float(input("Masse in kg: "))
l = float(input("Länge in m: "))

bmi = m / l ** 2
print(f"BMI = {bmi}")

if bmi < 30:
    print("Leichtes Übergewicht")
elif bmi < 25:
    print("Normalgewicht")
elif bmi < 20:
    print("Untergewicht")
else:
    print("Übergewicht")
```

Welche Ausgabe erfolgt nach der Eingabe von -1, von 0 und von 1?

```
zahl = int(input("1 oder 0 eingeben: "))

if zahl == 0:
    print("Null")
if zahl == 1:
    print("Eins")
else:
    print("Fehler")
```

Wie lautet die Ausgabe des folgenden Skripts?

```
a = 10
b = -10
c = -10

if a <= b:
    if a <= c:
        fall = 1
        wert = a
    else:
        fall = 2
        wert = c
else:
    fall = 4
    wert = c
    if b <= c:
        fall = 3
        wert = b

print(f"fall = {fall}")
print(f"wert = {wert}")
```

Schleifen

Wie lauten die Ausgaben der folgenden Skripte?

```
i = 0
for a in range(5):
    for b in range(10):
        for c in range(2):
            i += 1

print(f"i = {i}")
```

```
i = 0
for x in range(1, 11):
    for y in range(2, 11, 2):
        for z in range(1, 8):
            if z > 5:
                break
            i += 1

print(f"i = {i}")
```

```
i = 0
x = 0
while x < 10:
    y = 0
    while y < 10:
        y += 1
        if y == 6:
            continue
        i += 1
    x += 1

print(f"i = {i}")
```

```
for i in range(5):
    k = 0
    while k < i:
        print("+", end="")
        k += 1
    while k < 5:
        print("o", end="")
        k += 1
    print("")
```

Listen und Zeichenketten

Wie lautet die Ausgabe des folgenden Skripts?

```
xx = []
for i in range(10):
    xx.append(i)

print(f"{xx}")
print(f"{xx[1:3]}")
print(f"{xx[1:]}")
print(f"{xx[-3:-1]}")
print(f"{xx[-3:]}")
```

Versuchen Sie, das folgende Skript zu verstehen. Wozu dienen die Befehle in Teil A? Wozu wird die if-Abfrage in Teil A benötigt? Programmieren Sie nun Teil C:

- In Teil C wird das zweitgrößte Element in der Liste gesucht und ausgegeben.
- Die Methode sort(), die Funktion sorted() sowie externe Bibliotheksfunktionen dürfen nicht verwendet werden.

```
import random

# Teil A:
anz = 20
zz = []
while len(zz) < anz:
    z = random.randint(1, 100)
    if z not in zz:
        zz.append(z)

# Teil B:
m1 = 0
i1 = 0
for idx in range(anz):
    if zz[idx] > m1:
        m1 = zz[idx]
        i1 = idx
print(f"Größtes Element: {m1}")

# Teil C:
...
```

Wie lauten die Ausgaben der folgenden Skripte?

```
txt = "MEaTsecchhbnaiuksstuuddii"
for i in range(1, 16, 2):
    print(f"{txt[i]}", end="")
```

```
txt = "magübhncicdjhekefln"
result = ""

for i in range(0, len(txt), 3):
    if txt[i] in "ijklm":
        result += txt[i].upper()
    else:
        result += txt[i].lower()

print(result)
```

Funktionen

Wie lauten die Ausgaben der folgenden Skripte?

```
from cmath import sqrt, exp, pi

z1 = sqrt(-1)
z2 = 10 * exp(1j * pi / 2)

print(f"z1 = {z1:.1f}")
print(f"z2 = {z2:.1f}")
```

```
from math import sin, cos, pi


def my_fun(a, b):
    a *= pi
    b *= pi
    return sin(a), cos(b)


a, b = my_fun(1, 2)
print(f"a = {a:.1f}, b = {b:.1f}")
```

```
def f1():
    x = 20
    print("a:", x)


def f2():
    global x
    x = 30
    print("b:", x)


x = 10
print("c:", x)
f1()
print("d:", x)
f2()
print("e:", x)
```

B Lösungsvorschläge

Kapitel 1

```
# Aufgabe 1.1
# Umrechnung von kW nach PS

xx = input("Leistung in Kilowatt: ")
kw = float(xx)

ps = kw * 1.35962
print(f"{kw} kW entspricht {ps} PS.")
```

```
# Aufgabe 1.2
# Mitternachtsformel

from math import *

a = float(input("a: "))
b = float(input("b: "))
c = float(input("c: "))
print("")

diskrim = b**2 - 4 * a * c

if diskrim < 0:
    print("Keine reellen Nullstellen!")
else:
    x1 = (-b - sqrt(diskrim)) / (2 * a)
    x2 = (-b + sqrt(diskrim)) / (2 * a)
    print("Nullstellen:")
    print(f"  x1 = {x1}")
    print(f"  x2 = {x2}")
```

Kapitel 2

```
# Aufgabe 2.1
# Stromrechnung

kWh = float(input("Verbrauch in kWh: "))

if kWh > 5000:
    preis = 2500 * 0.40 + 2500 * 0.35 + (kWh - 5000) * 0.30
elif kWh > 2500:
    preis = 2500 * 0.40 + (kWh - 2500) * 0.35
else:
    preis = kWh * 0.40

print(f"Rechnungsbetrag: {preis:.2f} EUR")
```

```python
# Aufgabe 2.2, Variante a
# Maximum und Minimum

a = int(input("a eingeben: "))
b = int(input("b eingeben: "))
c = int(input("c eingeben: "))

maxi = a
if b > maxi:
    maxi = b
if c > maxi:
    maxi = c

print(f"Das Maximum ist: {maxi}")
```

```python
# Aufgabe 2.2, Variante b
# Maximum und Minimum

a = int(input("a eingeben: "))
b = int(input("b eingeben: "))
c = int(input("c eingeben: "))

if a > b:
    if a > c:
        maxi = a
    else:
        maxi = c
else:
    if b > c:
        maxi = b
    else:
        maxi = c

print(f"Das Maximum ist: {maxi}")
```

```python
# Aufgabe 2.3
# Body-Mass-Index

m = float(input("Körpergewicht in kg: "))
l = float(input("Größe in m: "))
bmi = m / l ** 2

if bmi < 20:
    print(f"BMI = {bmi:.1f}, Untergewicht")
else:
    if bmi < 25:
        print(f"BMI = {bmi:.1f}, Normalgewicht")
    else:
        if bmi < 30:
            print(f"BMI = {bmi:.1f}, leichtes Übergewicht")
        else:
            print(f"BMI = {bmi:.1f}, Übergewicht")
```

```
# Aufgabe 2.4, Variante a
# ICAO-Standardatmosphäre

hx = float(input("Bitte Höhe in m eingeben: "))

if hx < 0:
    print("Fehler: Höhe zu gering")
elif hx > 47000:
    print("Fehler: Höhe zu groß")
else:
    if hx < 11000:
        h1 = 0.0
        h2 = 11000.0
        T1 = 15.0
        T2 = -56.5
    elif hx < 20000:
        h1 = 11000.0
        h2 = 20000.0
        T1 = -56.5
        T2 = -56.5
    elif hx < 32000:
        h1 = 20000.0
        h2 = 32000.0
        T1 = -56.5
        T2 = -44.5
    else:
        h1 = 32000.0
        h2 = 47000.0
        T1 = -44.5
        T2 = -2.5

    # TODO: Temperatur in der Höhe hx berechnen und ausgeben
```

```
# Aufgabe 2.4, Variante b, mit Numpy
# ICAO-Standardatmosphäre

from numpy import interp

hh = [0, 11000, 20000, 32000, 47000]
tt = [15.0, -56.5, -56.5, -44.5, -2.5]
hx = float(input("Bitte Höhe in m eingeben: "))

if hx < hh[0]:
    print("Fehler: Höhe zu gering")
elif hx > hh[-1]:
    print("Fehler: Höhe zu groß")
else:
    Tx = interp(hx, hh, tt)
    print(f"Die Temperatur beträgt {Tx} °C")
```

Kapitel 3

```
# Aufgabe 3.1
# Fakultät

n = 0
while n < 1 or n > 50:
    n = int(input("n eingeben: "))

fakultaet = 1
while n > 1:
    fakultaet *= n
    n -= 1

print(f"Ergebnis: {fakultaet}")
```

```
# Aufgabe 3.2
# Funktion von zwei Veränderlichen

from math import exp, sqrt


def f(x, y):
    zaehler = exp(-x**2 - y**2)
    nenner = sqrt(1 + x**2 + y**2)
    return zaehler / nenner


print("x|y    0.0   0.1   0.2   0.3   0.4   0.5   0.6   0.7   0.8")

for x_tmp in range(0, 15, 2):
    x = x_tmp / 10
    print(f"{x:3.1f} |", end="")

    for y_tmp in range(0, 9, 1):
        y = y_tmp / 10
        z = f(x, y)
        print(f"{z:6.3f}", end="")

    print("")
```

```
# Aufgabe 3.3
# Einheitsmatrix

n = 1
while n != 0:
    n = int(input("Dimension (1 ... 10): "))

    # TODO: Eingabe wiederholen, falls ungültig

    for zeile in range(n):
        for spalte in range(n):
            if zeile == spalte:
                print("1 ", end="")
            else:
                print("0 ", end="")
        print("")

print("Ende des Programms.")
```

```python
# Aufgabe 3.4, Variante a
# Würfelspiel

from random import randint

anz1 = 0
anz2 = 0
anz3 = 0
anz4 = 0
anz5 = 0
anz6 = 0

for i in range(1000):
    x = randint(1, 6)
    if x == 1:
        anz1 = anz1 + 1
    elif x == 2:
        anz2 = anz2 + 1
    elif x == 3:
        anz3 = anz3 + 1
    elif x == 4:
        anz4 = anz4 + 1
    elif x == 5:
        anz5 = anz5 + 1
    else:
        anz6 = anz6 + 1

print(f"Anzahl 1: {anz1}")
print(f"Anzahl 2: {anz2}")
print(f"Anzahl 3: {anz3}")
print(f"Anzahl 4: {anz4}")
print(f"Anzahl 5: {anz5}")
print(f"Anzahl 6: {anz6}")
```

```python
# Aufgabe 3.4, Variante b, mit Liste
# Würfelspiel

from random import randint

anz = [0, 0, 0, 0, 0, 0]
for i in range(1000):
    x = randint(1, 6)
    anz[x - 1] += 1

for i in range(6):
    print(f"Anzahl {i+1}: {anz[i]}")
```

```python
# Aufgabe 3.5
# Funktionswerte berechnen

x = float(input("Start des x-Intervalls: "))
x1 = float(input("Ende des x-Intervalls: "))

while x <= x1:
    y = 2 * x ** 2 - x - 2
    print(f"{x:8.3f} {y:8.3f}")
    x = x + 0.25
```

```
# Aufgabe 3.6
# Funktionsgraphen zeichnen

from matplotlib.pyplot import *

x = float(input("Start des x-Intervalls: "))
x1 = float(input("Ende des x-Intervalls: "))

xx = []   # Liste mit x-Werten
yy = []   # Liste mit y-Werten

while x <= x1:
    y = 2 * x ** 2 - x - 2
    xx.append(x)
    yy.append(y)
    print(f"{x:8.3f} {y:8.3f}")
    x = x + 0.125

plot(xx, yy, "r-")
grid(True)
show()
```

```
# Aufgabe 3.7, Variante a
# Wurfparabel

import matplotlib.pyplot as plt
from math import sin, cos, radians


def wurfparabel(alpha0_grad, farbe):
    v0 = 10
    g = 9.81
    v_x0 = v0 * cos(radians(alpha0_grad))
    v_y0 = v0 * sin(radians(alpha0_grad))

    xx = []
    yy = []

    x = 0
    while x <= 10:
        y = -g / 2 * (x / v_x0) ** 2 + v_y0 * (x / v_x0)
        xx.append(x)
        yy.append(y)
        x = x + 0.01

    plt.plot(xx, yy, farbe)


wurfparabel(20, "r-")
wurfparabel(40, "b-")
wurfparabel(60, "k-")

# TODO: Titel, Legende, Achsenbeschriftung ausgeben

plt.grid(True)
plt.show()
```

```
# Aufgabe 3.7, Variante b, mit NumPy
# Wurfparabel

import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import sin, cos, radians, linspace


def wurfparabel(alpha0_grad, farbe):
    v0 = 10
    g = 9.81
    v_x0 = v0 * cos(radians(alpha0_grad))
    v_y0 = v0 * sin(radians(alpha0_grad))

    xx = linspace(0, 10, 250)
    yy = -g / 2 * (xx / v_x0) ** 2 + v_y0 * (xx / v_x0)
    plt.plot(xx, yy, farbe)


wurfparabel(20, "r-")
wurfparabel(40, "b-")
wurfparabel(60, "k-")

# TODO: Titel, Legende, Achsenbeschriftung ausgeben

plt.grid(True)
plt.show()
```

```
# Aufgabe 3.8
# Elastischer Balken, Variante a

xx = []
yy1 = []
yy2 = []
yy3 = []

x = 0
while x < 0.3:
    y1 = -1 / 9 * (0.9 * x ** 2 - x ** 3)
    y2 = -2 / 9 * (0.9 * x ** 2 - x ** 3)
    y3 = -3 / 9 * (0.9 * x ** 2 - x ** 3)

    xx.append(x)
    yy1.append(y1)
    yy2.append(y2)
    yy3.append(y3)
    x += 0.001

# TODO: Biegelinien, Koordinatengitter, Titel anzeigen
```

```
# Aufgabe 3.8
# Elastischer Balken, Variante b, mit NumPy

import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace

xx = linspace(0, 0.3)
yy1 = -1 / 9 * (0.9 * xx ** 2 - xx ** 3)
yy2 = -2 / 9 * (0.9 * xx ** 2 - xx ** 3)
yy3 = -3 / 9 * (0.9 * xx ** 2 - xx ** 3)

# TODO: Biegelinien, Koordinatengitter, Titel anzeigen
```

```
# Aufgabe 3.9, Variante a
# Spannung, Strom und Leistung

from matplotlib.pyplot import *
from math import *

tt = []
uu = []
ii = []
pp = []

t = 0
while t < 0.05:
    u = 10 * sin(2 * pi * 50 * t)
    i = pi * cos(2 * pi * 50 * t)
    p = u * i
    tt.append(t)
    uu.append(u)
    ii.append(i)
    pp.append(p)
    t += 0.0001

plot(tt, uu, "b-")
plot(tt, ii, "r-")
plot(tt, pp, "g--")
grid(True)
show()
```

```
# Aufgabe 3.9, Variante b, mit Numpy
# Spannung, Strom und Leistung

import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace, pi, sin, cos

tt = linspace(0, 0.05, 1000)
uu = 10 * sin(2 * pi * 50 * tt)
ii = pi * cos(2 * pi * 50 * tt)
pp = uu * ii

plt.plot(tt, uu, "b-")
plt.plot(tt, ii, "r-")
plt.plot(tt, pp, "g--")
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
# Aufgabe 3.10
# Fibonacci-Folge

n1 = 0
n2 = 1

for i in range(30):
    print(f"Nr. {i+1:2d}: {n1:6d}")
    n3 = n1 + n2
    n1 = n2
    n2 = n3
```

```
# Aufgabe 3.11
# Zeichenketten aus Textdatei lesen

anz_zeilen = 0
anz_ziffern = 0

with open("data.txt", "r") as file:
    for zeile in file:
        anz_zeilen += 1
        for z in zeile:
            if z in "0123456789":
                anz_ziffern += 1
            print(z.upper(), end="")

print("")
print("")
print(f"--> Anzahl Zeilen: {anz_zeilen}")
print(f"--> Anzahl Ziffern: {anz_ziffern}")
```

Kapitel 4

```
# Aufgabe 4.1
# Euklidischer Algorithmus

from random import randint


def ggT(a, b):
    while b != 0:
        tmp = a % b
        a = b
        b = tmp
    return a


aa = []
bb = []
cc = []

for i in range(100):
    zuf_a = randint(1, 100)
    zuf_b = randint(1, 100)

    aa.append(zuf_a)
    bb.append(zuf_b)
    cc.append(ggT(zuf_a, zuf_b))

print("Nr.   aa   bb   cc")
for i in range(100):
    print(f"{i+1:3d}", end="")
    print(f"{aa[i]:5d}", end="")
    print(f"{bb[i]:5d}", end="")
    print(f"{cc[i]:5d}")
```

```python
# Aufgabe 4.2
# Primzahlen

def primzahl(zahl):
    if zahl < 2:
        return False

    for t in range(2, zahl):
        if zahl % t == 0:
            return False

    return True


a = int(input("Primzahlen ermitteln von: "))
b = int(input("... bis: "))

for n in range(a, b + 1):
    if primzahl(n):
        print(f"{n:6d}")
```

```python
# Aufgabe 4.3
# Mitternachtsformel als Funktion

from math import sqrt


def qsolve(a, b, c):
    diskrim = b**2 - 4 * a * c

    if diskrim < 0:
        n = 0
        x1 = x2 = 0
    elif diskrim == 0:
        n = 1
        x1 = x2 = -b / (2 * a)
    else:
        n = 2
        x1 = (-b - sqrt(diskrim)) / (2 * a)
        x2 = (-b + sqrt(diskrim)) / (2 * a)

    return n, x1, x2


a = float(input("a: "))
b = float(input("b: "))
c = float(input("c: "))

n, x1, x2 = qsolve(a, b, c)

if n == 0:
    print("Keine reellen Nullstellen!")
elif n == 1:
    print(f"Doppelte Nullstelle bei {x1:.2f}")
else:
    print(f"Nullstellen bei {x1:.2f} und {x2:.2f}")
```

```python
# Aufgabe 4.4
# Quersumme als Funktion

def qsum(zahl):
    if zahl < 1:
        print("Funktion qsum: Bitte positive Zahl übergeben!")
        return 0

    summe = 0
    while zahl > 0:
        letzte_ziffer = zahl % 10
        summe = summe + letzte_ziffer
        zahl = zahl // 10

    return summe


z = int(input("Bitte ganze, positive Zahl eingeben: "))
q = qsum(z)

if q > 0:
    print(f"Die Quersumme von {z} beträgt {q}.")
```

```python
# Aufgabe 4.5
# Kraftvektor zerlegen

from math import sin, cos, pi


def kraft(m, alpha):
    g = 9.81
    fg = m * g

    fn = cos(alpha * pi / 180) * fg
    fh = sin(alpha * pi / 180) * fg
    return fn, fh


m = float(input("Masse in kg: "))
alpha = float(input("Winkel in Grad: "))

fn, fh = kraft(m, alpha)

print(f"Senkrecht zur Oberfläche: {fn:.2f} N")
print(f"Hangabtriebskraft: {fh:.2f} N")
```

```
# Aufgabe 4.6
# Numerische Integration, Monte-Carlo-Verfahren

from random import uniform
from math import sin

z1 = 0
z2 = 0
a = float(input("a: "))
b = float(input("b: "))


def f(x):
    return sin(x) ** 2


for i in range(10000):
    x = uniform(a, b)
    y = uniform(0, 1)

    if f(x) < y:
        z1 += 1
    else:
        z2 += 1

a1 = (b - a) / (z1 + z2) * z2
print(f"A1 = {a1:.3f}")
```

```
# Aufgabe 4.7
# Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

werte = [10, 47, 100, 150, 220, 330, 470, 1000, 1500, 2200,
         4700, 10000, 22000, 27000, 33000, 47000, 100000,
         220000, 470000, 1000000]


# Besten Einzelwiderstand ermitteln
def widerstand_einzel(soll):
    delta_min = 1e20
    for r in werte:
        delta = abs(soll - r)
        if delta < delta_min:
            delta_min = delta
            r_optimal = r

    proz = 100 * delta_min / soll
    print(f"A. Bester Einzelwiderstand: {r_optimal} Ohm.")
    print(f"Abweichung vom Sollwert: {delta_min} Ohm ({proz:.2f} %).")


# Beste Reihenschaltung ermitteln
def widerstand_reihe(soll):
    delta_min = 1e20
    for r1 in werte:
        for r2 in werte:
            r_gesamt = r1 + r2
            delta = abs(soll - r_gesamt)
            if delta < delta_min:
                delta_min = delta
                r1_optimal = r1
                r2_optimal = r2

    proz = 100 * delta_min / soll
    r_ges = r1_optimal + r2_optimal
    print(f"B. Reihenschaltung: {r1_optimal} und {r2_optimal} Ohm.")
    print(f"Gesamtwiderstand: {r_ges} Ohm.")
    print(f"Abweichung vom Sollwert: {delta_min} Ohm ({proz:.2f} %).")


# Beste Parallelschaltung ermitteln
def widerstand_parallel(soll):
    delta_min = 1e20
    for r1 in werte:
        for r2 in werte:
            r_gesamt = r1 * r2 / (r1 + r2)
            delta = abs(soll - r_gesamt)
            if delta < delta_min:
                delta_min = delta
                r1_optimal = r1
                r2_optimal = r2

    proz = 100 * delta_min / soll
    r_ges = r1_optimal * r2_optimal / (r1_optimal + r2_optimal)
    print(f"C. Parallelschaltung: {r1_optimal} und {r2_optimal} Ohm.")
    print(f"Gesamtwiderstand: {r_ges:.2f} Ohm.")
    print(f"Abweichung vom Sollwert: {delta_min} Ohm ({proz:.2f} %).")


# Hauptprogramm
print("Berechnung von Widerstandsschaltungen")
print("=====================================")
soll = int(input("Sollwert in Ohm: "))
widerstand_einzel(soll)
widerstand_reihe(soll)
widerstand_parallel(soll)
```

Kapitel 5

```
# Aufgabe 5.1
# Kraftvektoren addieren

kraefte = []
winkel = []
anzahl = 0

while True:
    k = float(input("Kraft  / N:    "))
    if k <= 0:
        break

    w = float(input("Winkel / Grad: "))
    kraefte.append(k)
    winkel.append(w)
    anzahl += 1

if anzahl == 0:
    print("Es wurden keine Kräfte eingegeben.")
else:
    print("")
    for idx in range(anzahl):
        k = kraefte[idx]
        w = winkel[idx]
        print(f"{idx+1:3d}: {k:8.3f} N, {w:8.3f} Grad")

# TODO: Gesamtkraft, Gesamtwinkel berechnen und ausgeben
```

```
# Aufgabe 5.2
# Mondrakete Saturn V

m = 2850000
r = 13840
f_schub = 34000000
g = 9.81
delta_t = 0.05
t = 0
v = 0

m_treibstoff = 0.73 * m
m_ende = m - 0.95 * m_treibstoff

while m > m_ende:
    a = f_schub / m - g
    m = m - delta_t * r
    v = v + delta_t * a
    t = t + delta_t
    print(f"t ={t:7.2f} s, v ={v:9.3f} m/s")

# TODO: Anfangs- und Endbeschleunigung ausgeben;
# wann wird die Schallgeschwindigkeit erreicht?
```

```python
# Aufgabe 5.3
# Kreiszahl Pi

from random import uniform
import matplotlib.pyplot as plt

n_kreis = 0
n = int(input("Anzahl Punkte: "))

for i in range(n):
    x = uniform(-1, 1)
    y = uniform(-1, 1)

    if x**2 + y**2 <= 1:
        n_kreis += 1

# TODO: Punkte P(x;y) grafisch darstellen

approx = 4 * n_kreis / n
print(f"Näherungswert für Pi: {approx:.10f}")
```

```python
# Aufgabe 5.4
# Lithium-Ionen-Akku

import matplotlib.pyplot as plt

tt = []
uu = []

with open("messung.txt", "r") as file:
    for line in file:
        values = line.split()
        t = float(values[0])
        u = float(values[1])

        tt.append(t)
        uu.append(u)

# TODO: Zeitpunkte ausgeben, wann die Akkuspannung erstmals
# unter 90 % bzw. unter 80 % der Anfangsspannung sinkt

t_anf = tt[0]
t_end = tt[-1]

u_90 = uu[0] * 0.9
u_80 = uu[0] * 0.8

plt.plot(tt, uu, "b+")
plt.plot([t_anf, t_end], [u_90, u_90], "r-")
plt.plot([t_anf, t_end], [u_80, u_80], "r-")

plt.title("Lithium-Ionen-Akku")
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
# Aufgabe 5.5
# Numerische Integration, Teilflächen aufsummieren, Variante a

def f(x):
    return x ** 3 / 4 - x ** 2 - x + 10


a = float(input("a: "))
b = float(input("b: "))

while a >= b:
    print("Eingabefehler!")
    a = float(input("a: "))
    b = float(input("b: "))

delta = (b - a) / 100
a1 = 0
for i in range(100):
    a1 += delta * f(a + i * delta)

print(f"A1 = {a1:.4f}")

# TODO: Fläche A2 mittels Stammfunktion F(x) exakt berechnen,
# Betrag der Differenz von A1 und A2 berechnen und ausgeben
```

```
# Aufgabe 5.5
# Numerische Integration, Teilflächen aufsummieren, Variante b, mit NumPy

from numpy import linspace


def f(x):
    return x ** 3 / 4 - x ** 2 - x + 10


while True:
    a = float(input("a: "))
    b = float(input("b: "))
    if a < b:
        break
    print("Eingabefehler!")

xx = linspace(a, b, 100, endpoint=False)
yy = f(xx)
a1 = sum(yy) * (b - a) / 100

print(f"A1 = {a1:.4f}")

# TODO: Fläche A2 mittels Stammfunktion F(x) exakt berechnen,
# Betrag der Differenz von A1 und A2 berechnen und ausgeben
```

```
# Aufgabe 5.6
# Nullstelle einer Funktion, Bisektionsverfahren

from numpy import sin, linspace
import matplotlib.pyplot as plt


def f(x):
    return x**3 + 35 * sin(x) + 15


x1 = float(input("x1: "))
x2 = float(input("x2: "))
xx = linspace(-5, 5, 250)
yy = f(xx)

plt.plot(xx, yy, "k-")
plt.plot([x1, x2], [f(x1), f(x2)], "b+")
plt.grid(True)

if f(x1) * f(x2) >= 0:
    plt.title("Startwerte x1, x2 ungültig!")

# TODO: Bisektionsverfahren programmieren,
# Nullstelle durch roten Punkt markieren

plt.show()
```

C NumPy und SciPy

Die Bibliotheken NumPy und SciPy ermöglichen es, (ingenieur-)wissenschaftliche Berechnungen auf einfache Weise durchzuführen. In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Anwendungsbeispiele vorgestellt, von Berechnungen mit Vektoren und Matrizen bis zur Lösung von Differentialgleichungen.

C.1 NumPy-Vektoren

NumPy-Vektoren können durch direkte Angabe der Elemente erstellt werden. Alternativ bietet NumPy verschiedene Funktionen, um Vektoren zu generieren.

```
1 import numpy as np
2
3 v1 = np.array([1.1, 2.2, 4.4, 8.8])   # Direkte Angabe der Vektor-Elemente
4 v2 = np.arange(1.0, 3.5, 0.5)         # [1.0, 3.5[ mit Schrittweite 0.5
5 v3 = np.zeros(5)                      # Vektor mit Null-Elementen
6 v4 = np.linspace(-1.5, 1.5, 31)       # 31 Elemente von -1.5 bis 1.5
```

```
v1 =
[1.1 2.2 4.4 8.8]

v2 =
[1.  1.5 2.  2.5 3. ]

v3 =
[0. 0. 0. 0. 0.]

v4 =
[-1.5 -1.4 -1.3 -1.2 -1.1 -1.  -0.9 -0.8 -0.7 -0.6 -0.5 -0.4 -0.3 -0.2
 -0.1  0.   0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1.   1.1  1.2
  1.3  1.4  1.5]
```

C.2 NumPy-Matrizen

Auch zur Erzeugung von Matrizen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die beiden letzten Beispiele zeigen, dass NumPy-Matrizen nicht quadratisch sein müssen. Achtung: Die doppelten Klammern bei M3 und M4 sind wichtig.

```
1 import numpy as np
2
3 M1 = np.array([[2.0, 1.0, 0.0], [1.0, 2.0, 1.0], [0.0, 1.0, 2.0]])
4 M2 = np.eye(3)                        # Einheitsmatrix
5 M3 = np.zeros((3, 5))                 # Null-Elemente, 3 Zeilen, 5 Spalten
6 M4 = np.random.random((3, 2))         # Zufallszahlen, 3 Zeilen, 2 Spalten
```

```
M1 =
[[2. 1. 0.]
 [1. 2. 1.]
 [0. 1. 2.]]

M2 =
[[1. 0. 0.]
 [0. 1. 0.]
 [0. 0. 1.]]

M3 =
[[0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0.]]

M4 =
[[0.29530639 0.54791115]
 [0.62668501 0.5019046 ]
 [0.19428632 0.19478768]]
```

C.3 Arithmetische Operationen

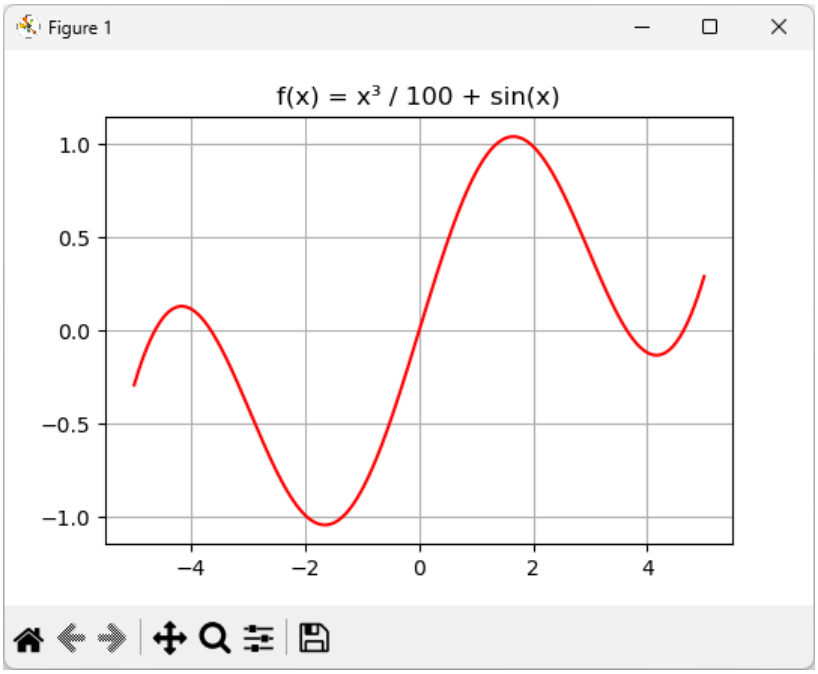
Grundlegende arithmetische Operationen können auch mit Vektoren und Matrizen durchgeführt werden. Wird ein NumPy-Vektor mit einem skalaren Wert multipliziert, so werden alle seine Elemente entsprechend skaliert. Analog dazu führt die Addition eines Skalars zu einer NumPy-Matrix dazu, dass dieser Wert zu jedem Element der Matrix addiert wird usw.

Bei der Addition von gleich großen Vektoren oder Matrizen erfolgt die Berechnung elementweise, das heißt, jedes Element wird zum entsprechenden Element der anderen Struktur addiert. Dasselbe Prinzip gilt für die übrigen Grundrechenarten.

NumPy bietet eine Vielzahl mathematischer Funktionen, die auf Vektoren und Matrizen angewendet werden können. Dazu gehören trigonometrische Funktionen, die Exponentialfunktion und die Quadratwurzel. Wendet man eine dieser Funktionen auf eine NumPy-Matrix oder einen NumPy-Vektor an, so erfolgt die Berechnung elementweise.

Dies erleichtert zum Beispiel das Plotten von Funktionen erheblich: Die in anderen Programmiersprachen übliche Programmierung von Schleifen zur Berechnung der einzelnen Stützpunkte ist nicht erforderlich.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  xx = np.linspace(-5.0, 5.0, 501)   # Vektor mit x-Werten von -5 ... +5
5  yy = xx ** 3 / 100 + np.sin(xx)    # Funktion für alle x-Werte berechnen
6
7  plt.title("f(x) = x³ / 100 + sin(x)")
8  plt.plot(xx, yy, "r-")
9  plt.grid(True)
10 plt.show()
```



C.4 Lineare Gleichungssysteme, @-Operator

Der @-Operator ermöglicht Matrix- und Vektor-Multiplikationen nach den Regeln der linearen Algebra. Wird der @-Operator auf zwei Vektoren angewendet, führt dies zur Berechnung des Skalarprodukts.

```
import numpy as np

M1 = np.array([[2.0, 0.0, 0.0], [0.0, 2.0, 0.0], [0.0, 0.0, 2.0]])
M2 = np.array([[0.0, 1.1, 2.2], [1.1, 2.2, 3.3], [2.2, 3.3, 4.4]])

v1 = np.array([3.0, 2.0, 1.0])
v2 = np.array([1.0, 2.0, 3.0])

M3 = M1 @ M2   # Matrix-Matrix-Multiplikation
v3 = M1 @ v1   # Matrix-Vektor-Multiplikation
v4 = v1 @ v2   # Skalarprodukt
```

```
M3 =
[[0.  2.2 4.4]
 [2.2 4.4 6.6]
 [4.4 6.6 8.8]]

v3 =
[6. 4. 2.]

v4 =
10.0
```

Das lineare Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ besitzt eine eindeutige Lösung $\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{b}$, falls die Determinante von M ungleich null ist. Der @-Operator kann zur Matrix-Vektor-Multiplikation und somit auch bei der Lösung dieses Gleichungssystems genutzt werden. Das folgende Beispiel zeigt außerdem noch eine zweite Lösungsvariante, die ohne Multiplikation mit der inversen Matrix M^{-1} auskommt.

```
import numpy as np

M = np.array([[2.0, 1.0, 1.0], [1.0, -1.0, 2.0], [3.0, 3.0, -3.0]])
b = np.array([1.0, -2.5, 9.0])

if np.linalg.det(M) == 0:
    print("Keine eindeutige Lösung!")
else:
    xa = np.linalg.inv(M) @ b    # Multiplikation mit inverser Matrix
    xb = np.linalg.solve(M, b)   # Alternative Lösung mit linalg.solve()
```

```
xa =
[ 1.   0.5 -1.5]

xb =
[ 1.   0.5 -1.5]
```

Die Berechnung der inversen Matrix kann numerisch instabil sein. Daher wird zur Lösung linearer Gleichungssysteme die Variante mit np.linalg.solve() empfohlen, welche zudem hinsichtlich der Laufzeit effizienter ist.

C.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Drei Kugeln sind durch Federn miteinander verbunden. Sie können sich in x-Richtung bewegen.[6] Die Masse einer einzelnen Kugel beträgt $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$, für die Federkonstanten gilt $c = 10\,\mathrm{N/m}$. Das System wird durch die folgende Bewegungsgleichung beschrieben, dabei sind x_0, x_1 und x_2 die aktuellen Positionen der drei Kugeln:

$$\frac{m}{c} \cdot \ddot{\vec{x}} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \vec{x} \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{C.1}$$

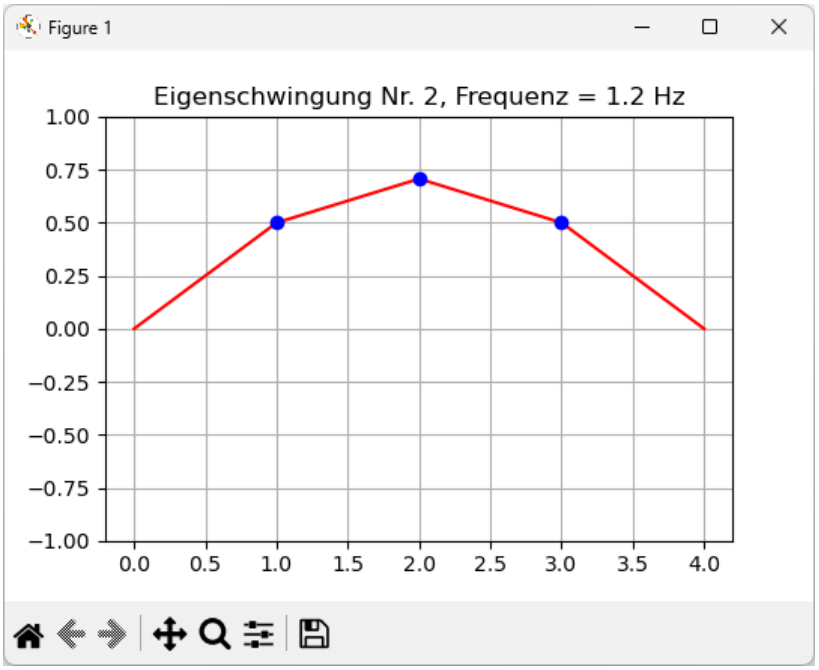
Ziel ist es, die drei möglichen Eigenschwingungen (Moden) des Systems zu bestimmen. Die Frequenzen dieser Eigenschwingungen ergeben sich aus den Eigenwerten λ_i der Matrix A:

$$\omega_i = 2\pi f_i = \sqrt{\lambda_i \cdot \frac{c}{m}} \tag{C.2}$$

Die Elemente des Eigenvektors geben die relativen Schwingungsamplituden der Kugeln an. Sie werden vom folgenden Python-Skript grafisch dargestellt. Positive und negative Werte zeigen entgegengesetzte Bewegungsrichtungen.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from math import sqrt, pi
4
5  # Welche der drei Eigenschwingungen soll berechnet werden?
6  n = int(input("Eigenschwingung 0, 1 oder 2: "))
7
8  A = np.array([[ 2, -1,  0],
9                [-1,  2, -1],
10               [ 0, -1,  2]])
11
12 ew, ev = np.linalg.eig(A)
13 ew_n = ew[n]      # n-ter Eigenwert
14 ev_n = ev[:, n]   # n-ter Eigenvektor (n-te Spalte von ev)
15
16 # Frequenz berechnen
17 c = 10
18 m = 0.1
19 freq = 1 / (2 * pi) * sqrt(ew_n * c / m)
20
21 # Schwingungsamplituden plotten; zusätzlich auch die
22 # Federn am Anfang/Ende der Schwingerkette zeichnen
23 ii = [0, 1, 2, 3, 4]
24 xx = [0, ev_n[0], ev_n[1], ev_n[2], 0]
25
26 plt.plot(ii, xx, "r-")
27 plt.plot(ii[1:4], xx[1:4], "bo")  # Kugelpositionen markieren
28 plt.grid(True)
29 plt.title(f"Eigenschwingung Nr. {n}, Frequenz = {freq:.1f} Hz")
30 plt.ylim(-1, 1)
31 plt.show()
```

[6] YouTube „Lec 05: Coupled Oscillators | 8.03 Vibrations and Waves, Fall 2004 (Walter Lewin)“ ab Position 1:09:00 (Stand: 25.04.2025).

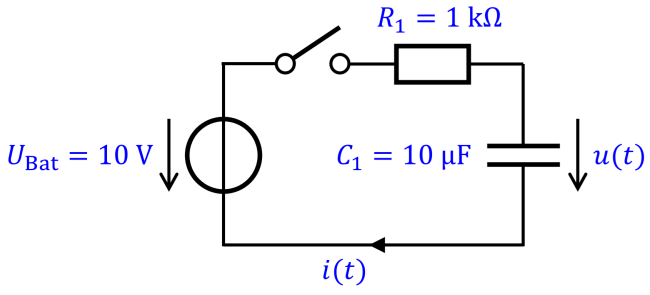


Mit ew, ev = np.linalg.eig(A) werden die Eigenwerte und Eigenvektoren von A ermittelt. Die Eigenwerte werden im Vektor ew zurückgegeben, die zugehörigen Eigenvektoren stehen nebeneinander in den Spalten von ev.

```
ew =
[3.41421356 2.         0.58578644]

ev =
[[-5.00000000e-01 -7.07106781e-01  5.00000000e-01]
 [ 7.07106781e-01  5.09486455e-16  7.07106781e-01]
 [-5.00000000e-01  7.07106781e-01  5.00000000e-01]]
```

C.6 Differentialgleichungen erster Ordnung

Der Kondensator C_1 ist über den Widerstand R_1 mit der Spannungsquelle U_{Bat} verbunden. Der Kondensator ist zunächst nicht geladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Die zeitlichen Verläufe der Spannung $u(t)$ und des Stroms $i(t)$ nach dem Schließen des Schalters sollen ermittelt und grafisch dargestellt werden. Diese Aufgabe kann mit der Funktion solve_ivp() aus der SciPy-Bibliothek gelöst werden.



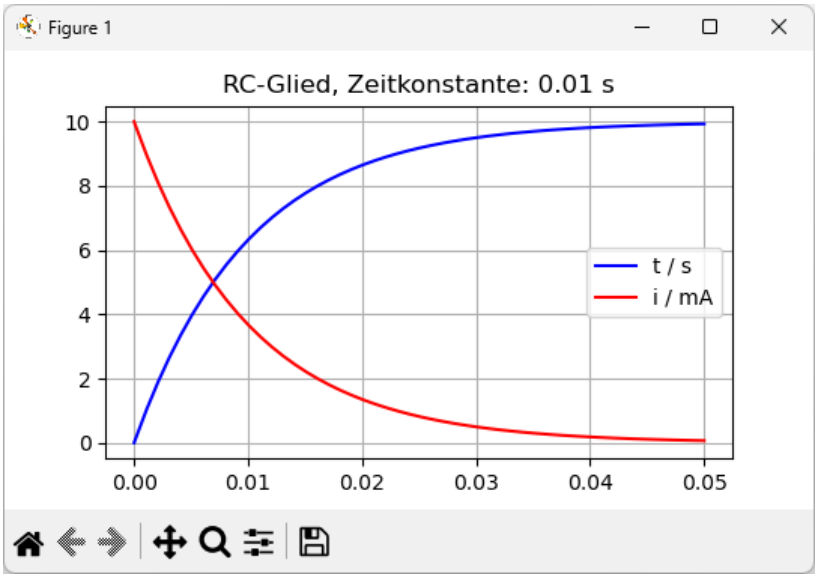
Es gilt die folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\dot{u} = \frac{U_{\text{Bat}}}{R_1 C_1} - \frac{u}{R_1 C_1} \tag{C.3}$$

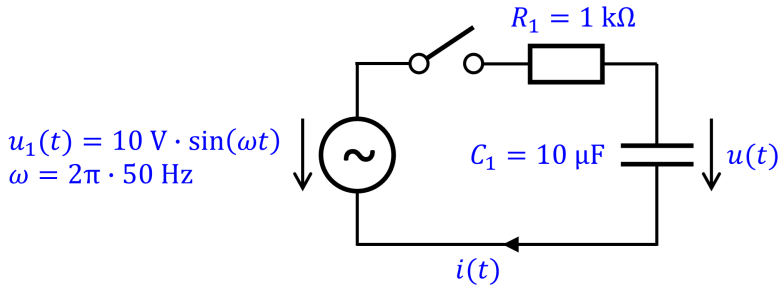
Ist die Kondensatorspannung u bekannt, lässt sich daraus der Strom i berechnen:

$$i = \frac{U_{\text{Bat}} - u}{R_1} \tag{C.4}$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

UBat = 10.0     # Spannung UBat (in Volt)
R1 = 1000.0     # Widerstand R1 (in Ohm)
C1 = 0.00001    # Kapazität C1 (in Farad)
u0 = 0.0        # Kondensatorspannung zu Beginn
tstart = 0.0    # Simulation beginnt bei t = 0
tstop = 0.05    # Simulationsdauer (in Sekunden)
tstep = 0.001   # Maximale Zeitschrittgröße (in Sekunden)


# Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung; der Parameter t muss immer
# in der Funktions-Kopfzeile stehen, auch wenn er nicht benötigt wird.
def my_dgl(t, u):
    du_dt = UBat / (R1 * C1) - u / (R1 * C1)
    return du_dt


# DGL numerisch lösen; die Angabe der max. Zeitschrittgröße ist optional.
sol = solve_ivp(my_dgl, [tstart, tstop], [u0], max_step=tstep)
tt = sol.t      # Numpy-Vektor mit Zeitpunkten
uu = sol.y[0]   # Numpy-Vektor mit Spannungswerten

# Aus den Spannungswerten uu werden die Stromwerte ii berechnet.
ii = (UBat - uu) / R1

plt.title(f"RC-Glied, Zeitkonstante: {R1*C1} s")
plt.plot(tt, uu, "b-")
plt.plot(tt, 1000 * ii, "r-")  # Milliampere, Faktor 1000
plt.legend(["t / s", "i / mA"])
plt.grid(True)
plt.show()
```



Nun wird statt der Gleichspannung U_{Bat} die Wechselspannung $u_1(t) = 10\,\text{V} \cdot \sin(\omega t)$ mit $\omega = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz}$ angeschlossen. Wieder sollen die zeitlichen Verläufe von $u(t)$ und $i(t)$ ermittelt und grafisch dargestellt werden.



Die Differentialgleichung ist in diesem Fall auch von t abhängig:

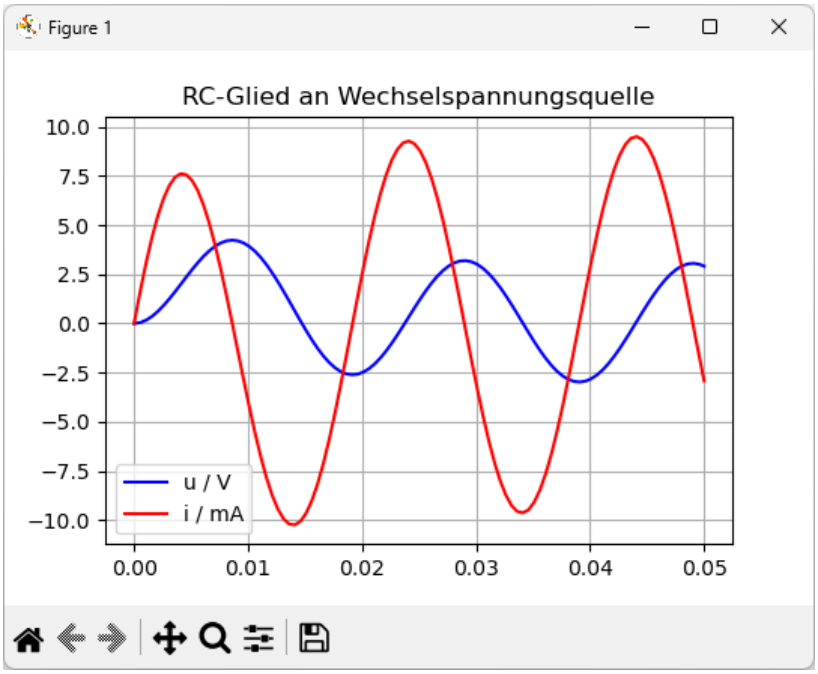
$$\dot{u} = \frac{10\,\text{V} \cdot \sin(\omega t)}{R_1 C_1} - \frac{u}{R_1 C_1} \tag{C.5}$$

Für den Ladestrom i gilt entsprechend:

$$i = \frac{10\,\text{V} \cdot \sin(\omega t) - u}{R_1} \tag{C.6}$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

R1 = 1000.0      # Widerstand R1 (in Ohm)
C1 = 0.00001     # Kapazität C1 (in Farad)
u0 = 0.0         # Kondensatorspannung zu Beginn
tstart = 0.0     # Simulation beginnt bei t = 0
tstop = 0.05     # Simulationsdauer (in Sekunden)
tstep = 0.0005   # Maximale Zeitschrittgröße (in Sekunden)
omega = 2 * np.pi * 50   # Kreisfrequenz


# Differentialgleichung mit zeitabhängiger Anregung
def my_dgl(t, u):
    du_dt = 10 * np.sin(omega * t) / (R1 * C1) - u / (R1 * C1)
    return du_dt


# DGL numerisch lösen; die Angabe der max. Zeitschrittgröße ist optional.
sol = solve_ivp(my_dgl, [tstart, tstop], [u0], max_step=tstep)
tt = sol.t       # Numpy-Vektor mit Zeitpunkten
uu = sol.y[0]    # Numpy-Vektor mit Spannungswerten

# NumPy-Sinusfunktion verwenden, weil tt ein NumPy-Vektor ist!
ii = (10 * np.sin(omega * tt) - uu) / R1

plt.title("RC-Glied an Wechselspannungsquelle")
plt.plot(tt, uu, "b-")
plt.plot(tt, 1000 * ii, "r-")   # Milliampere, Faktor 1000
plt.legend(["u / V", "i / mA"])
plt.grid(True)
plt.show()
```

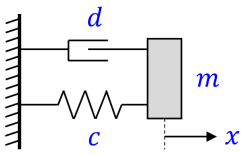
Man kann gut erkennen, dass es nach dem Einschalten ca. 50 Millisekunden dauert, bis ein eingeschwungener Zustand erreicht ist:



C.7 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Ein Feder-Masse-Schwinger (Masse m, Federkonstante c, Dämpfung d proportional zur Geschwindigkeit) wird durch die folgende Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung beschrieben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten die angegebenen Anfangsbedingungen:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m} \cdot x - \frac{d}{m} \cdot \dot{x} \quad \text{mit} \quad x(t=0) = 0{,}1\,\text{m} \quad \text{und} \quad \dot{x}(t=0) = 0\,\text{m/s} \tag{C.7}$$



$d = 0{,}1\,\text{Nm}$
$m = 0{,}2\,\text{kg}$
$c = 2{,}5\,\text{N/m}$

Differentialgleichungen höherer Ordnung müssen in DGL-Systeme erster Ordnung umgewandelt werden, um sie mit der SciPy-Funktion solve_ivp() lösen zu können. Zu diesem Zweck werden die folgenden Hilfsvariablen definiert:

$$\begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_1 &:= \dot{x} \end{aligned} \tag{C.8}$$

Damit kann das DGL-System erster Ordnung hingeschrieben werden:

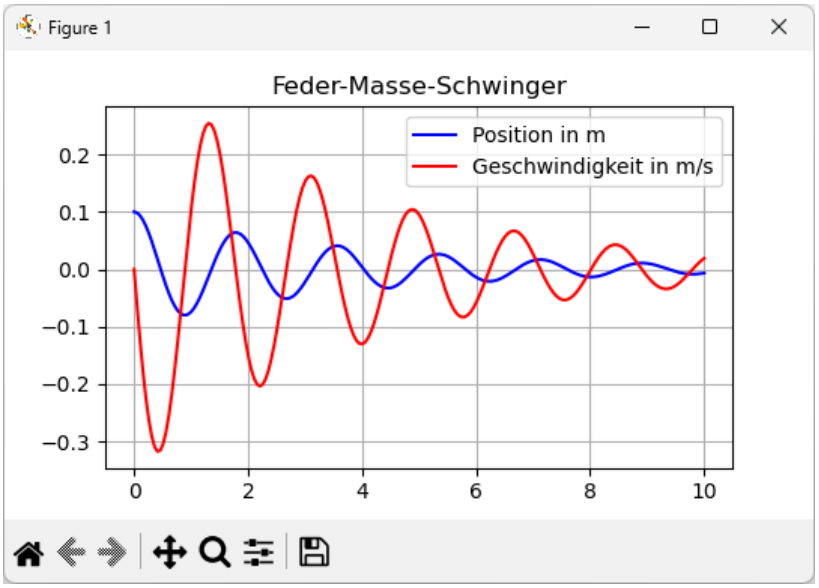
$$\begin{aligned} \dot{y_0} &= y_1 \\ \dot{y_1} &= -(c/m) \cdot y_0 - (d/m) \cdot y_1 \end{aligned} \tag{C.9}$$

Schließlich wird das DGL-System in Matrixform notiert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix}}_{\dot{\vec{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/m & -d/m \end{bmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}}_{\vec{y}} \quad \text{mit} \quad \vec{y}(t=0) = \begin{bmatrix} 0{,}1\,\text{m} \\ 0\,\text{m/s} \end{bmatrix} \tag{C.10}$$

Dieses DGL-System erster Ordnung kann nun mittels solve_ivp() gelöst werden:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

m = 0.2          # Masse (in kg)
c = 2.5          # Federkonstante (in N/m)
d = 0.1          # Dämpfungskonstante (in Ns/m)
tstart = 0.0     # Simulation beginnt bei t = 0
tstop = 10.0     # Simulationsdauer (in Sekunden)
tstep = 0.05     # Maximale Zeitschrittgröße (in Sekunden)


# DGL-System in Matrixform (y ist ein NumPy-Vektor!)
def my_dgl_sys(t, y):
    M = np.array([[0, 1], [-c/m, -d/m]])
    dy_dt = M @ y   # Matrix-Vektor-Multiplikation
    return dy_dt    # Numpy-Vektor mit Ableitungen


# DGL-System lösen; Anzahl der Anfangsbedingungen muss zum DGL-System passen!
initial = np.array([0.1, 0])
sol = solve_ivp(my_dgl_sys, [tstart, tstop], initial, max_step=tstep)
tt = sol.t       # Numpy-Vektor mit Zeitpunkten
xx = sol.y[0]    # Numpy-Vektor mit Positionen
vv = sol.y[1]    # Numpy-Vektor mit Geschwindigkeiten

plt.title("Feder-Masse-Schwinger")
plt.plot(tt, xx, "b-")
plt.plot(tt, vv, "r-")
plt.legend(["Position in m", "Geschwindigkeit in m/s"])
plt.grid(True)
plt.show()
```



D Weiterführende Literatur und Internetquellen

Bücher:

- Guido Van Rossum, Python Development Team:
  Learning Python, Crash Course Tutorial
  Medina University Press International, 2020. ISBN: 978-5304117357
  Dieses Buch bietet eine umfassende Einführung in Python. Der Inhalt entspricht dem offiziellen Python-Tutorial (siehe weiter unten, Internetquellen).
- Ralph Steyer:
  Programmierung in Python, Ein kompakter Einstieg für die Praxis
  Springer Vieweg, Wiesbaden, 2018. ISBN: 978-3-658-20704-5
  Dieses Buch bietet eine praxisorientierte Einführung mit zahlreichen Beispielen und Anwendungsfällen. Es ist insbesondere für Einsteiger geeignet. Das Buch kann über SpringerLink heruntergeladen werden (Stand: 10.03.2025):
  https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-20705-2
- Carsten Knoll, Robert Heedt:
  Python für Ingenieure für Dummies
  Wiley-VCH, 2021. ISBN: 978-3527717675
  Dieses Buch zeigt anhand zahlreicher Beispiele, wie Python zur Lösung typischer Ingenieurprobleme eingesetzt werden kann, von der Datenakquise über verschiedene Berechnungsverfahren bis hin zur Ergebnisvisualisierung.

Internetquellen:

- **Python Tutorial - Offizielle Dokumentation** (Stand: 10.03.2025)
  https://docs.python.org/3/tutorial/index.html
  Dieses Online-Tutorial bietet eine strukturierte Einführung in die Programmiersprache Python, von den Grundlagen bis hin zu fortgeschrittenen Techniken.
- **Matplotlib Quickstart Guide** (Stand: 10.03.2025)
  https://matplotlib.org/stable/users/explain/quick_start.html
  Ein ausführliches Tutorial zur Erzeugung ansprechender Visualisierungen mit der Matplotlib. Die vielen Beispiele gehen weit über den Stoff der Ingenieurinformatik-Lehrveranstaltung hinaus.
- **NumPy Quickstart Guide** (Stand: 10.03.2025)
  https://numpy.org/doc/stable/user/quickstart.html
  Dieses Tutorial bietet eine kompakte Einführung in die NumPy-Bibliothek zum wissenschaftlichen Rechnen mit Python.
- **SciPy User Guide - Offizielle Dokumentation** (Stand: 10.03.2025)
  https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/index.html
  Diese Webseite bietet eine umfassende Einführung in die SciPy-Bibliothek. Diese baut auf NumPy auf und stellt mathematische Algorithmen und Funktionen bereit, etwa zur Integration, Optimierung, Interpolation und Signalverarbeitung.